

Aus:

Facetten der Thermodynamik

Prof. Dr.rer.nat. Dr.h.c. Ingo Müller zum 60. Geburtstag

H. Struchtrup (Hrsg.), Institut für Verfahrenstechnik der TU Berlin, Fachgebiet Thermodynamik, 1997

Zwei homogene irreversible Prozesse

HENNING STRUCHTRUP, TU Berlin

Prof. Ingo Müller zum 60sten Geburtstag

Zusammenfassung: Von Zeit zu Zeit gibt Prof. Ingo Müller seinen Mitarbeitern kleinere Aufgaben, deren Lösung ihn interessiert. Zwei dieser Probleme werden im vorliegenden Artikel behandelt. Bei den betrachteten Prozessen handelt es sich um homogene irreversible Prozesse, die nicht zuletzt auch für den Anfänger der Thermodynamik irreversibler Prozesse einigen didaktischen Wert haben mögen. Behandelt werden die *Plötzliche Kompression von Naßdampf* und ein auf einem Gas schwingender Kolben mit *Dämpfung durch irreversiblen Wärmeübergang*.

1 Plötzliche Kompression von Naßdampf

1.1 Problemstellung

Ein Behälter des Volumens V_1 enthalte die Masse m Naßdampf des Dampfgehaltes x_1 bei einem Druck von p_1 und der zugehörigen Siedetemperatur $T_1(p_1)$ (Zustand 1).

Nun wird der Naßdampf so schnell auf den Druck p_2 komprimiert, daß während der Dauer der Kompression kein Dampf kondensiert oder verdampft, d.h. der Dampfgehalt bleibt konstant.

Ausgehend von diesem Zustand 2 wird sich der Naßdampf dem Gleichgewicht (Zustand 3) nähern. Dies soll bei konstantem Druck geschehen; die Behälterwände seien adiabat.

Wir werden annehmen, daß stets die gesamte Flüssigkeit auf dem Boden ruht, während der Dampf darüber liegt, siehe Abb. 1. Außerdem sollen innerhalb einer Phase alle Felder homogen sein.

1.2 Materialannahmen

Die kalorische und thermische Zustandsgleichung von Naßdampf sind nicht bekannt. Bei kleinen Drücken können wir jedoch in guter Näherung annehmen, daß sich die Dampfphase als ideales Gas und die flüssige Phase als inkompressible Flüssigkeit beschreiben lassen.

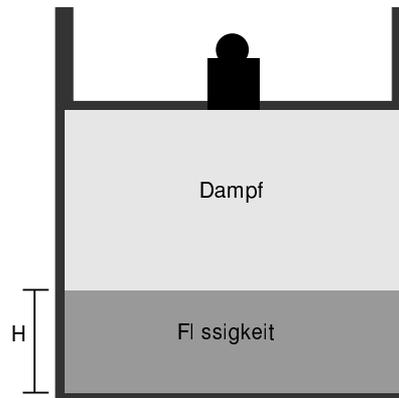


Abbildung 1: Der Zylinder unter konstantem Druck mit den beiden Phasen.

Dann sind spezifische Enthalpie h^F und Entropie s^F der Flüssigkeit gegeben durch

$$h^F = c_w (T - T_0) \quad , \quad s^F = c_w \ln \frac{T}{T_0}, \quad (1)$$

$c_w = 4.18 \text{ kJ/kgK}$ ist die spezifische Wärme des Wassers. Die Bezugstemperatur wird als $T_0 = 273.15 \text{ K}$ gewählt, so daß bei 0°C Enthalpie und Entropie des flüssigen Wassers verschwinden.

Spezifische Enthalpie und Entropie des Dampfes sind gegeben durch

$$h^D = c_p (T - T_0) + r_0 \quad , \quad s^D = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p(T_0)} + \frac{r_0}{T_0}, \quad (2)$$

$R = 0.462 \text{ kJ/kgK}$ ist die spezielle Gaskonstante des Wassers, $c_p = 3R = 1.386 \text{ kJ/kgK}$ seine spezifische Wärme, $r_0 = 2500 \text{ kJ/kg}$ ist die Verdampfungswärme bei 0°C und $p(T_0) = 0.006107 \text{ bar}$ ist der Dampfdruck bei 0°C .

Aus diesen Materialgleichungen ergeben sich für den Zustand 2 unter der Annahme einer adiabaten reversiblen Kompression ohne Kondensation bzw. Verdampfung die folgenden Zustandsgrößen

$$x_2 = x_1 \quad , \quad T_2^F = T_1 \quad , \quad T_2^D = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/3}. \quad (3)$$

1.3 Massenbilanzen

Zwischen den Zuständen 2 und 3 ändern sich die Massen der Phasen durch den Kondensationsvorgang an der Grenzfläche. Die Massenbilanz für ein System mit beliebig bewegter Berandung lautet [1]

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \rho (v_i - \hat{v}_i) n_i dA$$

Hier ist ρ die Massendichte, v_i ist die Geschwindigkeit des Stoffes und \hat{v}_i ist die Geschwindigkeit der äußeren Umrandung mit Normale n_i .

Da nur die Phasengrenze massedurchlässig ist und wir alle Felder als homogen annehmen, reduzieren sich die Massenbilanzen von Flüssigkeit und Dampf auf

$$\frac{dm^F}{dt} = -\rho^F (v_G^F - v_G) A \quad , \quad \frac{dm^D}{dt} = \rho^D (v_G^D - v_G) A \quad (4)$$

v_G kennzeichnet die Geschwindigkeit der Grenzfläche A , v_G^F und v_G^D sind die Geschwindigkeiten von Flüssigkeit bzw. Dampf an der Grenzfläche. Aus Abb. 1 lesen wir für die Masse der Flüssigkeit ab $m^F = \rho^F A H$ und erhalten

$$\frac{dm^F}{dt} = \rho^F A \frac{dH}{dt} = \rho^F A v_G. \quad (5)$$

Der Vergleich von (4)₁ und (5) zeigt, daß die Flüssigkeit an der Phasengrenze ruht, $v_G^F = 0$. Da die Gesamtmasse erhalten bleibt, gilt dann

$$v_G^D = v_G \left(1 - \frac{\rho^F}{\rho^D} \right).$$

und als einzige unbekannt GröÙe verbleibt in den Massenbilanzen die Geschwindigkeit der Phasengrenze v_G . Diese ersetzen wir durch die pro Zeiteinheit kondensierende Wassermasse $\sigma = \rho^F v_G A$ und schreiben

$$\frac{dm^F}{dt} = \sigma \quad , \quad \frac{dm^D}{dt} = -\sigma. \quad (6)$$

Die GröÙe σ werden wir später mit Hilfe der Irreversiblen Thermodynamik bestimmen.

1.4 Energiebilanzen

Für ein System mit beliebig bewegtem Rand lautet die Bilanz der inneren Energie [1]

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = - \int_{\partial V} \rho u (v_i - \hat{v}_i) n_i dA + \int_V t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV - \int_{\partial V} q_i n_i dA, \quad (7)$$

hier ist u die spezifische innere Energie, t_{ij} der Spannungstensor und q_i ist der Wärmeflußvektor. Im folgenden vernachlässigen wir die viskosen Spannungen und nehmen an, daß Dichte, innere Energie und Druck im System homogen sind. Dann gilt insbesondere $t_{ij} = -p\delta_{ij}$ und $\int_V t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = -p \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV$. Das letzte Integral wird über ein Volumen genommen, das sich mit der Geschwindigkeit \hat{v}_i bewegt. Wir berechnen es unter Verwendung des Satzes von Gauß,

$$\int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV = \int_V \frac{\partial v_i - \hat{v}_i}{\partial x_j} dV + \int_V \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j} dV = \int_{\partial V} (v_i - \hat{v}_i) n_i dA + \frac{dV}{dt},$$

definieren den Wärmefluß

$$\dot{Q} = - \int_{\partial V} q_i n_i dA$$

und erhalten aus (7) die Bilanz der Enthalpie $H = U + pV$ für ein offenes homogenes System,

$$\frac{dH}{dt} = -\rho h \int_{\partial V} (v_i - \hat{v}_i) n_i dA + \dot{Q}.$$

Unter Verwendung der Massenbilanzen (4, 6) können wir jetzt die Enthalpiebilanzen für die beiden Phasen aufstellen,

$$\frac{dH^F}{dt} = \sigma h^F + \dot{Q}^F \quad , \quad \frac{dH^D}{dt} = -\sigma h^D + \dot{Q}^D \quad (8)$$

Da unser Gesamtsystem adiabat sein soll, berücksichtigen die Wärmeflüsse \dot{Q}^F, \dot{Q}^D nur den Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und Dampf. Die Gesamtenthalpie des Systems muß konstant sein, also

$$\dot{Q}^F = \sigma (h^D - h^F) - \dot{Q}^D. \quad (9)$$

Damit enthalten unsere Massen- und Enthalpiebilanzen zwei unbekannte Größen, nämlich die pro Zeiteinheit kondensierende Masse σ und den Wärmefluß aus dem Dampf \dot{Q}^D . Für beide werden wir jetzt mit den Methoden der Thermodynamik irreversibler Prozesse (TIP) phänomenologische Gleichungen herleiten. Dazu benötigen wir die Entropiebilanz.

1.5 Entropiebilanz und phänomenologische Gleichungen

Die Bilanz der Entropie S für ein beliebig bewegtes Volumen lautet

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho s dV = - \int_{\partial V} \rho s (v_i - \hat{v}_i) n_i dA - \int_{\partial V} \frac{q_i}{T} n_i dA + \Sigma$$

wobei $\Sigma \geq 0$ die Entropieproduktion im Volumen ist. Für die jeweils homogenen Gebiete von Flüssigkeit und Dampf erhalten wir

$$\frac{dS^F}{dt} = \sigma s^F + \frac{\dot{Q}^F}{T^F}, \quad \frac{dS^D}{dt} = -\sigma s^D + \frac{\dot{Q}^D}{T^F}$$

da die Entropieproduktionen aufgrund der Homogenität verschwinden, $\Sigma^F = \Sigma^D = 0$. Addition dieser beiden Gleichungen liefert die Entropiebilanz für das Gesamtsystem, die wir unter Verwendung von (9) schreiben können als

$$\frac{dS}{dt} = \sigma \left(\frac{g^D}{T^D} - \frac{g^F}{T^F} - h^D \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) \right) + \dot{Q}^D \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) = \Sigma \geq 0, \quad (10)$$

$g = h - Ts$ ist die freie Enthalpie.

Wir verwenden die Sprache der TIP [2] und schreiben die Entropieproduktion als Summe von Produkten aus "thermodynamischen Flüssen" J_A und "thermodynamischen Kräften" F_A ,

$$\Sigma = \sum_A J_A F_A.$$

Durch Vergleich mit (10) identifizieren wir

$$J_A = \left\{ \sigma, \dot{Q}^D \right\}, \quad F_A = \left\{ \frac{g^D}{T^D} - \frac{g^F}{T^F} - h^D \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right), \frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right\}$$

Die Positivität der Entropieproduktion wird garantiert durch einen "phänomenologischen Ansatz"

$$J_A = \sum_B A_{AB} F_A$$

mit einer positiv definiten Matrix A_{AB} .

Wir wählen für diese kleine Betrachtung willkürlich den einfachsten Ansatz,

$$\sigma = \lambda \left(\frac{g^D}{T^D} - \frac{g^F}{T^F} - h^D \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) \right), \quad \dot{Q}^D = \alpha \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) \quad (11)$$

mit positiven Koeffizienten λ, α . Insbesondere bedeutet (11)₂, daß die in die Dampfphase fließende Wärme nur auf die Temperaturdifferenz zwischen Dampf und Flüssigkeit zurückzuführen ist. Wegen (9) fließt dann die bei der Kondensation freiwerdende Verdampfungswärme $\sigma (h^D - h^F)$ komplett in die Flüssigkeit. Da die Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit wesentlich größer ist als die des Dampfes, ist dieser Ansatz plausibel.

1.6 Dampfdruck und Verdampfungswärme

Bevor wir zur Lösung der Gleichungen kommen, wollen wir ihre das Gleichgewicht betreffenden Aussagen diskutieren: Im Gleichgewicht verschwinden die Produktionen, $\sigma = 0$, $\dot{Q}^D = 0$, und aus (11) folgt erwartungsgemäß die Gleichheit der Temperaturen und der freien Enthalpien beider Phasen,

$$T^D = T^F \quad , \quad g^D = g^F .$$

Aus der zweiten Bedingung erhalten wir zusammen mit den Materialgleichungen (1, 2) eine Gleichung für den Druck im Phasengleichgewicht - den Dampfdruck

$$p(T) = p(T_0) \exp \left\{ -\frac{r_0}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + \frac{c_w - c_p}{R} \left(1 - \frac{T_0}{T} - \ln \frac{T}{T_0} \right) \right\} \quad (12)$$

Die üblicherweise in Lehrbüchern aus der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung abgeleitete Formel für den Dampfdruck enthält nur den ersten Term in der Exponentialfunktion [3]. Der zweite Term stellt eine Verbesserung dar: bei $T = 343K$ mißt man z.B. einen Dampfdruck von $p(T) = 0.3116bar$, aus (12) bestimmt man ihn zu $p(T) = 0.3081bar$ während man ohne den neuen Term $p(T) = 0.3478bar$ errechnet.

Mit Hilfe der Clausius-Clapeyron'schen Gleichung kann man aus (12) eine Näherung für die Temperaturabhängigkeit der Verdampfungswärme gewinnen,

$$r = r_0 + (c_w - c_p)(T_0 - T) .$$

1.7 Resultate

Wir kommen nun zur Berechnung des Prozesses zwischen den Zuständen 2 und 3. Als Variable haben wir zunächst die Massen und Temperaturen beider Phasen anzusehen. Die Gesamtmasse ist jedoch konstant

$$m = m^D(t) + m^F(t) = const$$

und dasselbe gilt für die Gesamtenthalpie,

$$H(t) = m^D(t) [c_p(T^D(t) - T_0) + r_0] + (m - m^D(t)) [c_w(T^F(t) - T_0)] = H_2 = const. \quad (13)$$

mit

$$H_2 = mx_1 [c_p(T_2 - T_0) + r_0] + m(1 - x_1) [c_w(T_1 - T_0)] .$$

Aus (13) berechnen wir die Temperatur der Flüssigkeit zu

$$T^F(t) = \frac{H_2 - m^D(t) [c_p(T^D(t) - T_0) + r_0]}{(m - m^D(t)) c_w} + T_0 \quad (14)$$

Zu dieser Gleichung nehmen wir noch die Bilanzen des Dampfes, die wir vereinfacht schreiben können als

$$\frac{dm^D}{dt} = -\lambda \left(\frac{g^D}{T^D} - \frac{g^F}{T^F} - h^D \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) \right) \quad (15)$$

$$m^D c_p \frac{dT^D}{dt} = \alpha \left(\frac{1}{T^D} - \frac{1}{T^F} \right) \quad (16)$$

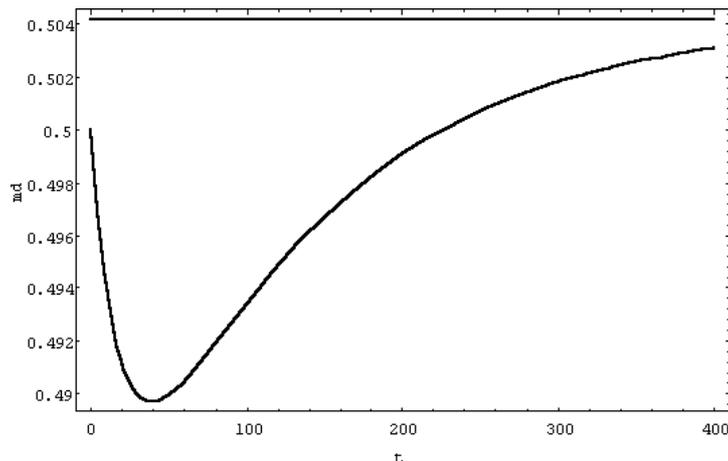


Abbildung 2: Dampfmasse m^D als Funktion der Zeit. Der Gleichgewichtswert $m^D = 0.2637\text{kg}$ ist eingezeichnet.

Diese drei Gleichungen sind nun numerisch zu lösen. Zustand 1 sei gegeben durch

$$p_1 = 0.99115\text{bar} \Rightarrow T_1 = 373.15\text{K} \quad , \quad x_1 = 0.3 \quad , \quad m = 1\text{kg}.$$

Unter Vorgabe des Druckes p_2 folgen aus (3) die Größen im Zustand 2

$$p_2 = 4.5172\text{bar} \Rightarrow T_2^F = 545.213 \quad , \quad T_2^D = 423.15 \quad , \quad x_2 = 0.5 \quad .$$

Im Zustand 3 (Gleichgewicht) haben Dampf und Flüssigkeit dieselbe Temperatur, nämlich die Siedetemperatur zum Druck $p_3 = p_2$,

$$T_3^D = T_3^F = T(p_2) = 423.15\text{K}$$

und aus (13) ergibt sich der Dampfgehalt

$$x_3 = \frac{\frac{H_2}{m} - c_w (T(p_2) - T_0)}{(c_p - c_w) (T(p_2) - T_0) + r_0} = 0.5042.$$

Der zeitliche Verlauf von Dampfmasse m^D und der Temperaturen T^F, T^D wurde berechnet unter Vorgabe der phänomenologischen Koeffizienten

$$\alpha = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{kJ K}}{\text{s}} \quad , \quad \lambda = 10^{-3} \frac{\text{kg}^2 \text{K}}{\text{kJ s}}.$$

Diese Werte entsprechen nicht der Wirklichkeit, sondern wurden willkürlich gewählt. In Abb. 2 sieht man, daß zunächst (ungefähr bis $t = 50\text{s}$) Dampf an der kalten Flüssigkeit kondensiert. Ein Blick auf Abb. 3 zeigt, daß die bei der Kondensation freiwerdende Verdampfungswärme und der Wärmeübergang vom Dampf in die Flüssigkeit die Temperatur der Flüssigkeit über die Siedetemperatur $T(p_2)$ heben. Durch die spätere Verdampfung eines Teils der Flüssigkeit (Abb. 2) sinken dann die Temperaturen auf die Siedetemperatur. Aussagen über das tatsächliche Verhalten des Systems können erst nach Messung der phänomenologischen Koeffizienten gemacht werden.

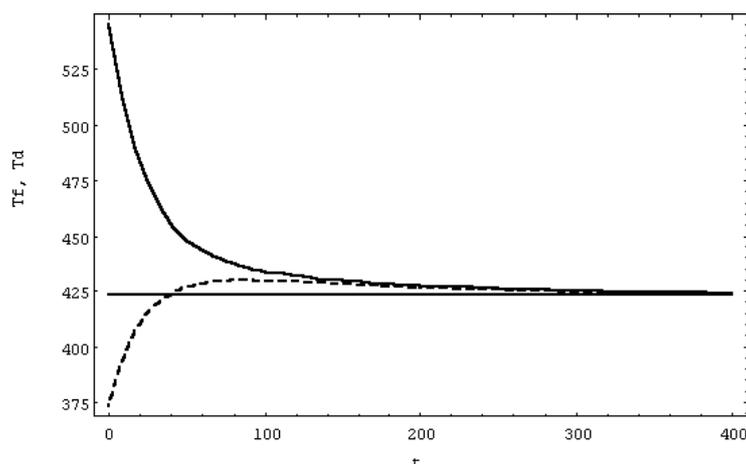


Abbildung 3: Temperaturen T^F (gestrichelt) und T^D (durchgezogen) als Funktionen der Zeit. Der Gleichgewichtswert $T = 423.15\text{K}$ ist eingezeichnet.

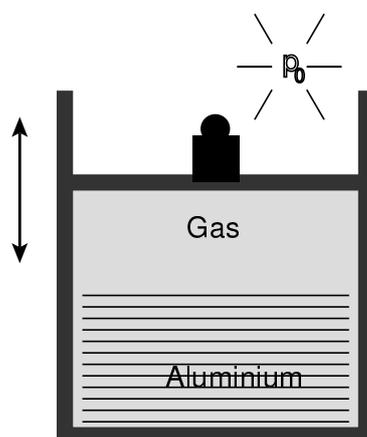


Abbildung 4: Dämpfung durch irreversiblen Wärmeübergang: Ein Kolben schwingt auf einem Gas, in dem sich viele dünne Aluminiumscheiben befinden.

2 Dämpfung durch irreversiblen Wärmeübergang

2.1 Problemstellung

Wir betrachten einen mit der Luftmasse m_L gefüllten Zylinder, der durch einen reibungsfrei bewegbaren Kolben der Masse m_K abgeschlossen ist. Im Innern des wärmedichten Zylinders befinden sich n Schichten Aluminium vom Querschnitt A und der Gesamtmasse m_A , s. Abb. 4. Der Kolben wird in eine Schwingbewegung versetzt und wir fragen nach dem zeitlichen Verlauf des Zylindervolumens V sowie der Temperaturen von Gas und Aluminium, T_G und T_A . Wir setzen homogene Verhältnisse im Gas und im Aluminium voraus, vernachlässigen also Dissipation durch Reibung und Wärmeleitung.

Der interessante Parameter in diesem System ist die Zahl der Aluminiumschichten n , die proportional zur Kontaktfläche Gas-Aluminium ist. Je größer n ist, desto besser kann Wärme zwischen Gas und Aluminium ausgetauscht werden. Wir werden untersuchen, inwieweit die

Zahl n Frequenz und Dämpfung der Schwingung beeinflusst.

Diese Fragestellung wurde durch den Film "Reversible and Irreversible Processes" von B. Ferretti ausgelöst [4], in dem ein solches System vorgeführt wird.

2.2 Grundgleichungen

Wir wollen in diesem Teil etwas schneller durch die Gleichungen gehen:

Die Energiebilanz für die Luft lautet [3]

$$\frac{dU_L}{dt} = \dot{Q} - p \frac{dV}{dt}. \quad (17)$$

Wir betrachten die Luft als ideales Gas, dann haben wir für innere Energie U_L und Druck p die Zustandsgleichungen

$$U_L = m_L c_v T_L \quad , \quad p = m_L R_L \frac{T_L}{V}$$

mit der speziellen Gaskonstante $R_L = 0.286 \text{ kJ/kgK}$ und der spezifischen Wärme $c_v = 0.717 \text{ kJ/kgK} = 5/2 R_L$; V kennzeichnet das Volumen des Zylinders. Die Wärme \dot{Q} fließt in das Aluminium, das wir als inkompressiblen Festkörper ansehen mit der Energiebilanz

$$\frac{dU_A}{dt} = -\dot{Q} \quad (18)$$

und der inneren Energie $U_A = m_A c_A T_A$. $c_A = 0.907 \text{ kJ/kgK}$ ist die spezifische Wärme des Aluminiums.

Wieder gibt uns die Entropiebilanz den Zusammenhang zwischen Wärmefluß und den Temperaturen der beteiligten Stoffe. Dazu setzen wir die Gibbs-Gleichungen für Luft, $T_L dS_L = dU_L + p dV$, und Aluminium, $T_A dS_A = dU_A$, in die Entropiebilanz

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d(S_L + S_A)}{dt} \geq 0$$

ein und erhalten unter Verwendung der Energiebilanzen (17, 18)

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right) \dot{Q} \geq 0. \quad (19)$$

Die phänomenologische Gleichung für \dot{Q} , die die Positivität der Entropieproduktion garantiert, lautet hier

$$\dot{Q} = \alpha n \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right).$$

αn ist die Wärmeübergangszahl, von der wir vernünftigerweise annehmen, daß sie proportional zur Oberfläche des Aluminiums, also zur Schichtenzahl n ist.

Die bisherigen Gleichungen dieses Abschnittes fassen wir zusammen zu zwei Gleichungen für die Temperaturen T_L, T_A ,

$$\frac{dT_L}{dt} = \frac{\alpha}{m_L c_v} n \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right) - \frac{2 T_L}{5 V} \frac{dV}{dt} \quad (20)$$

$$\frac{dT_A}{dt} = -\frac{\alpha}{m_A c_A} n \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right) \quad (21)$$

Die notwendige dritte Gleichung für das Volumen liefert uns die Bewegungsgleichung des Kolbens,

$$m_K \frac{d^2 H}{dt^2} = (p - p_0) A - m_K g,$$

die Kraft auf den Kolben setzt sich aus Druckkraft $(p - p_0) A$ und Gewichtskraft $m_K g$ zusammen; $H = V/A$ ist die Höhe des Kolbens über dem Zylinderboden. Den äußeren Luftdruck p_0 und die Erdbeschleunigung g eliminieren wir mit einer Füllbedingung: Bei der Temperatur T_0 und einem Volumen V_0 sei der Kolben in Ruhe. Dann gilt

$$\left(m_L R_L \frac{T_0}{V_0} - p_0 \right) A = m_K g \implies A p_0 + m_K g = A m_L R_L \frac{T_0}{V_0}$$

und wir können die Impulsbilanz schreiben als

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = A^2 \frac{m_L}{m_K} R_L \left(\frac{T_L}{V} - \frac{T_0}{V_0} \right). \quad (22)$$

Mit (20, 21, 22) haben wir drei Gleichungen für die zu bestimmenden Größen T_L, T_A und V gewonnen.

2.3 Grenzfälle

Wir untersuchen die Gleichungen zunächst für die Grenzfälle verschwindender ($n \rightarrow 0$) und unendlich großer ($n \rightarrow \infty$) Aluminiumoberfläche.

2.3.1 $n \rightarrow 0$ (kein Wärmeaustausch)

In diesem Fall folgt aus (20) die Adiabatengleichung für das Gas während nach (21) die Aluminiumtemperatur konstant bleibt

$$\frac{d \ln T_L V^{\frac{2}{5}}}{dt} = 0 \implies T_L = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{2}{5}}, \quad \frac{dT_A}{dt} = 0 \implies T_A = T_0.$$

Die Entropiebilanz (19) liefert die Konstanz der Entropie - es handelt sich um einen adiabaten reversiblen Prozeß.

2.3.2 $n \rightarrow \infty$ (perfekter Wärmeaustausch)

Der Wärmefluß $\alpha n \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right)$ muß endlich bleiben. Geht die Aluminiumfläche nach unendlich ($n \rightarrow \infty$), müssen also die Temperaturen von Luft und Aluminium gleich sein,

$$T_L = T_A = T.$$

Die gemeinsame Temperatur folgt aus der Bilanz der Gesamtenergie,

$$(m_L c_v + m_A c_A) \frac{dT_L}{dt} = -\frac{2}{5} m_L c_v \frac{T_L}{V} \frac{dV}{dt} \implies T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{2}{5} / \left(1 + \frac{m_A c_A}{m_L c_v} \right)}. \quad (23)$$

Auch dieser Prozeß ist adiabat reversibel ($dS/dt = 0$) und wir können (23) als Adiabatengleichung mit dem Adiabatenexponenten

$$\hat{\kappa} = \frac{\frac{7}{5} + \frac{m_A c_A}{m_L c_v}}{1 + \frac{m_A c_A}{m_L c_v}}$$

ansehen. Ist insbesondere die Masse des Aluminiums sehr viel größer als die Luftmasse, $m_A c_A \gg m_L c_v$, wird $\hat{\kappa} \simeq 1$ und der Prozeß ist näherungsweise isotherm *und* adiabat reversibel!

In beiden Grenzfällen schwingt der Kolben also reversibel; im Allgemeinen ist dies nicht der Fall.

2.4 Frequenz und Dämpfung

Bevor wir das komplette nichtlineare Problem lösen, wollen wir Frequenz und Dämpfung des Systems berechnen. Dazu betrachten wir kleine Schwingungen, in denen die Felder T_L, T_A, V nur wenig von ihren Gleichgewichtswerten T_0, V_0 abweichen. Wir setzen

$$T_L = T_0 (1 + \theta_L) \quad , \quad T_A = T_0 (1 + \theta_A) \quad , \quad V = V_0 (1 + v)$$

und vernachlässigen alle Produkte der kleinen Größen θ_L, θ_A, v . Es folgt

$$\frac{d\theta_L}{dt} = \beta n (\theta_A - \theta_L) - \frac{2}{5} \frac{dv}{dt} \quad , \quad \frac{d\theta_A}{dt} = -\beta \gamma n (\theta_A - \theta_L) \quad , \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = \delta (\theta_L - v) \quad (24)$$

mit den Abkürzungen

$$\beta = \frac{\alpha}{m_L c_v T_0^2} \quad , \quad \gamma = \frac{m_L c_v}{m_A c_A} = \frac{1 - \hat{\kappa}}{\hat{\kappa} - \frac{7}{5}} \quad , \quad \delta = \frac{A^2}{m_K V_0} m_L R_L \frac{T_0}{V_0}. \quad (25)$$

Zur Lösung des Gleichungssystems (24) setzen wir harmonische Funktionen an,

$$\theta_L = \hat{\theta}_L \exp i\omega t \quad , \quad \theta_A = \hat{\theta}_A \exp i\omega t \quad , \quad v = \hat{v} \exp i\omega t$$

und erhalten ein lineares Gleichungssystem für die komplexen Amplituden $\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_A, \hat{v}$,

$$\begin{bmatrix} i\omega + \beta n & -\beta n & \frac{2}{5}i\omega \\ -\beta \gamma n & i\omega + \beta \gamma n & 0 \\ -\delta & 0 & -\omega^2 + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_L \\ \hat{\theta}_A \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen finden wir nur, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet, wenn also gilt

$$\omega \left(\omega^2 - \frac{7}{5} \delta \right) - i\beta n (\gamma + 1) (\omega^2 - \hat{\kappa} \delta) = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung liefern die für ω erlaubten Werte. Der Realteil von ω ist die Frequenz der Schwingung, der Imaginärteil gibt die zugehörige Dämpfung an. Für die eben behandelten Grenzfälle finden wir jeweils ungedämpfte Schwingungen mit den Frequenzen

$$\omega_{n \rightarrow 0} = \sqrt{\frac{7}{5} \delta} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{n \rightarrow \infty} = \sqrt{\hat{\kappa} \delta}$$

Für alle von null verschiedenen endlichen Werte von n sind die Schwingungen gedämpft!

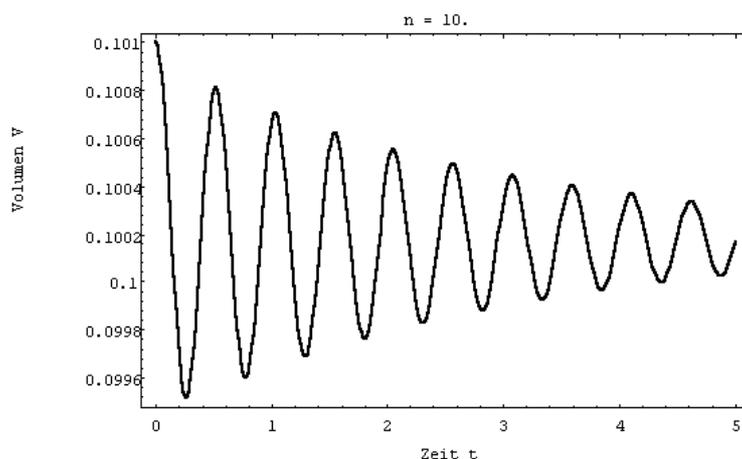


Abbildung 5: Volumen als Funktion der Zeit.

2.5 Resultate

Wir zeigen die Ergebnisse für eine Rechnung mit $n = 10$ Aluminiumschichten und den folgenden Parametern:

$$T_0 = 273.15K \quad , \quad p_0 = 1bar \quad , \quad V_0 = 0.1m^3 \quad , \quad A = 0.1m^2$$

$$\alpha = 2 \cdot 10^3 \frac{kJ}{s \cdot K} \quad , \quad m_L = 0.140kg \quad , \quad m_A = 0.1kg \quad , \quad m_K = 100kg$$

Die Abbildungen zeigen die numerisch ermittelte Lösung des nichtlinearen Problems. In Abb. 5 sieht man deutlich den Abfall der Amplitude; die Dämpfung ist auf den einzigen dissipativen Prozeß im System - den Wärmeübergang - zurückzuführen.

Abb. 6 zeigt die gegeneinander versetzten Schwingungen in den Temperaturen von Luft und Aluminium. Die starke Schwankung der Lufttemperatur ist primär eine Folge der adiabaten Kompression, während die schwächer schwankende Aluminiumtemperatur sich lediglich aufgrund des Wärmeübergangs ändert.

Abb. 7 zeigt die Zunahme der Entropie. Man sieht deutlich, daß die Entropie rascher zunimmt, wenn die Temperaturen sich stärker unterscheiden. Die zunehmende Annäherung an das Gleichgewicht ist durch die Abnahme der Entropiezunachsrates gut zu erkennen.

Literatur

- [1] I.MÜLLER *Thermodynamics*. Pitman, New York (1985)
- [2] I.MÜLLER, T.RUGGERI *Extended Thermodynamics*. Springer, New York (1993) (Springer Tracts in Natural Philosophy Vol. 37)
- [3] I.MÜLLER *Grundzüge der Thermodynamik*. Springer, Berlin (1994)
- [4] B. FERRETTI *Reversible and Irreversible Processes*, zu entleihen bei: Institut für den Wissenschaftlichen Film, Postfach 23 51, 37013 Göttingen.

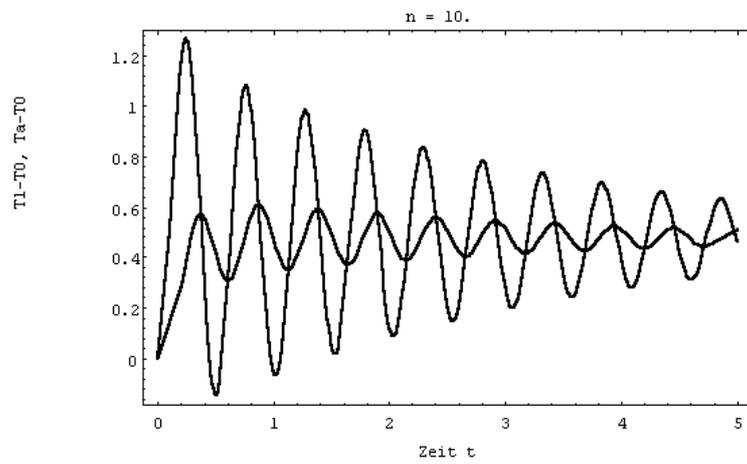


Abbildung 6: Temperaturen T_L, T_A über der Zeit.

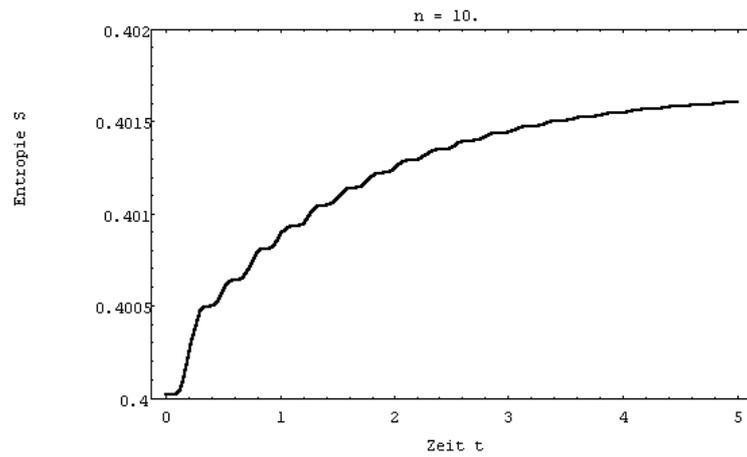


Abbildung 7: Gesamtentropie $S = S_L + S_A$ als Funktion der Zeit.