

Zur irreversiblen Thermodynamik der Strahlung

– Ein Beitrag zur Erweiterten Thermodynamik –

vorgelegt von

Henning Struchtrup

Vom Fachbereich 6
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuß:

Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. Günter Wozny
Berichter:	Prof. Dr.rer.nat. Dr.h.c. Ingo Müller
Berichter:	Priv.DoZ. Dr.rer.nat. Wolfgang Dreyer

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 16.April 1996

Berlin 1996

D83

Zur irreversiblen Thermodynamik der Strahlung

– Ein Beitrag zur Erweiterten Thermodynamik –

vorgelegt von

Henning Struchtrup

Vom Fachbereich 6
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Berlin 1996

D83

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Thermodynamik und Reaktionstechnik der Technischen Universität Berlin.

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Dr.rer.nat. Dr.h.c. Ingo Müller, der mir die Gelegenheit gegeben hat, dieses interessante Thema zu bearbeiten. Er hat das Entstehen dieser Arbeit mit Interesse und Hilfsbereitschaft verfolgt, vor allem aber haben seine - wenn nötig oft wiederholten - Fragen mir erst den Reiz des Themas entschlüsselt und die Möglichkeit gegeben, auf diesem Gebiet noch Neues zu entdecken.

Herrn Priv.Doz. Dr. Wolfgang Dreyer von der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) gebührt mein Dank für die Übernahme des Korreferates. Nach der Durchsicht des Manuskriptes führten wir erwartungsgemäß anregende und erhellende Diskussionen, die in der Arbeit ihren Niederschlag fanden.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Günter Wozny gilt mein Dank für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses.

Ohne die andauernden Diskussionen über Thermodynamik mit meinen Kollegen Dipl.-Ing. Jörg Au, Dr.-Ing. Stefan Seelecke und Dr. rer.nat. Wolf Weiss hätte ich viele Gedanken nicht in den Griff bekommen; unsere Gespräche über Gott und die Welt sind stets das Salz in der Suppe.

Berlin, im Februar 1996

Einleitung

Das wesentliche Ziel der irreversiblen Strahlungsthermodynamik ist die Berechnung des Transportes von Energie und Impuls durch Strahlung sowie des Austausches von Energie und Impuls zwischen Strahlung und Materie.

Ein weiteres Ziel ist die Berechnung anderer in der Thermodynamik wichtiger Größen, etwa der Entropie, des Entropieflusses und der Entropieproduktion der Strahlung.

Die Kenntnis dieser Größen ist notwendig in allen physikalischen Systemen in denen Strahlung in Wechselwirkung mit Materie steht. Das wichtigste Anwendungsgebiet ist sicherlich die Astrophysik, d.h. die Beschreibung der Prozesse im Innern von Sternen. Grundsätzlich ist zu unterscheiden zwischen Prozessen in denen die Strahlung im lokalen thermischen Gleichgewicht mit der Materie steht, im folgenden als Strahlungsgleichgewicht bezeichnet, und Prozessen in denen das gerade nicht der Fall ist.

Beide Probleme sind im Prinzip gelöst, wenn die Strahlungs-Transport-Gleichung mit allen die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie beschreibenden Termen bekannt ist. Die Bereitstellung der Wechselwirkungsterme ist Aufgabe der Quantenmechanik [7][40], im wesentlichen müssen spektrale Absorptions- und Streukoeffizienten berechnet werden. Da sich die Vorgänge im Innern von Sternen naturgemäß einer Messung entziehen und auch nicht im Labor simuliert werden können, müssen die Koeffizienten vollständig, also ohne anzupassende Parameter, bekannt sein.

Die thermodynamischen Größen können aus der Verteilungsfunktion der Strahlung (oder alternativ, aus der Intensität) und den spektralen Absorptions- und Streukoeffizienten durch Integration über alle Frequenzen und Ausbreitungsrichtungen berechnet werden. Dazu muß die Verteilungsfunktion bekannt sein. Sie ergibt sich als Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung. Diese ist allerdings nur für einfache Probleme analytisch lösbar, im allgemeinen muß sie numerisch gelöst werden. Die interessierenden Größen folgen dann durch (numerische) Integration.

Im Fall des lokalen Strahlungsgleichgewichts liegt lokal die bekannte Planck-Verteilung vor. Mit einer der Chapman-Enskog-Methode ähnlichen Prozedur kann eine Näherungslösung der Strahlungs-Transport-Gleichung konstruiert werden, aus der sich alle interessierenden Größen berechnen lassen, s. z.B. [7]. Daraus ergibt sich insbesondere das Rosseland-Mittel des Absorptionskoeffizienten, das als Proportionalitätsfaktor zwischen dem Strahlungsimpuls (oder dem Energiefluß) und dem Temperaturgradienten der Materie steht.

Die Theorie des lokalen Nichtgleichgewichts zwischen Strahlung und Materie wird notwendig, wenn die Wechselwirkung von Strahlung mit relativ dünner Materie beschrieben werden muß, etwa in der Atmosphäre von Sternen. Während die Theorie des Strahlungsgleichgewichts voll ausgeformt ist und neue Nahrung nur durch die Berechnung neuer spektraler Koeffizienten erhalten kann, ist die Theorie des lokalen Nichtgleichgewichts noch heute Gegenstand der Forschung.

Der Zugang über die Strahlungs-Transport-Gleichung ist sehr aufwendig, da diese für alle Frequenzen und Ausbreitungsrichtungen gelöst werden muß. Hier bietet sich als Alternative die Methode der Momentengleichungen an: Aus der Strahlungs-Transport-Gleichung lassen sich Momentengleichungen für die Momente der Verteilungsfunktion (unter anderem Energie und Impuls) gewinnen. Man erhält einen Satz unendlich vieler gekoppelter partieller Differentialgleichungen, die die Strahlungs-Transport-Gleichung ersetzen.

Da es nicht möglich ist, unendlich viele Gleichungen zu lösen, muß man sich auf eine endliche Zahl von Momentengleichungen beschränken. Es stellt sich die Frage, welche und wieviele Momentengleichungen benötigt werden, um den Energie- und Impulstransport zufriedenstellend zu beschreiben.

Die Beschränkung auf eine endliche Zahl von Gleichungen wirft noch ein weiteres Problem auf: Das Gleichungssystem aus endlich vielen Gleichungen ist nicht abgeschlossen, da in ihm mehr Unbekannte als Variablen auftreten. Hier benötigt man Zustandsgleichungen, um das System zu schließen. Es fragt sich, wie diese zu bestimmen sind.

Hier gibt es eine Vielzahl konkurrierender Theorien, die die gestellten Probleme auf verschiedene Art angehen. Eine große Zahl von Autoren beschränkt sich auf die Momentengleichungen für Energie und Impuls, die mit verschiedenen Mitteln abgeschlossen werden, [3][28][30][31][35] u.a. Diese Theorien reichen zu einer korrekten Beschreibung des lokalen Nichtgleichgewichts nicht aus, da die Vielfalt an möglichen Abweichungen von der Gleichgewichtsverteilung unmöglich nur durch zwei Größen, Energie und Impuls, beschrieben werden kann¹.

Aus diesem Grund wurde von ANDERSON&SPIEGEL [2] eine Theorie entwickelt, die eine größere

¹Mit einer dieser Theorien [3][28] werden wir uns in Kap. 15 dieser Arbeit kritisch auseinandersetzen.

Zahl von Momenten berücksichtigt. Diese Theorie wurde später insbesondere von THORNE [49] und SCHWEIZER [45] ausgeformt, die sich vor allem mit der Berechnung mittlerer Absorptions- und Streukoeffizienten beschäftigten. Unseres Erachtens ist auch diese Theorie nicht befriedigend, da die gewählten Momente zwar die Anisotropie der Verteilungsfunktion widerspiegeln, die spektrale Abweichung der Verteilungsfunktion von der Planck-Verteilung jedoch nicht berücksichtigen.

Daher gehen wir in der vorliegenden Arbeit vor wie folgt: Zunächst wird ein ganz allgemeiner Satz von Momenten als Variable gewählt. Die Verteilungsfunktion wird mittels des Entropiemaximumprinzips als Funktion der Variablen dargestellt. Diese Verteilungsfunktion stellt sich heraus als eine Reihenentwicklung der tatsächlichen Verteilungsfunktion nach Kugelflächenfunktionen, wodurch die Anisotropie berücksichtigt wird, und nach Potenzen der Frequenz, womit auch die spektrale Abweichung von der Gleichgewichtsverteilung ihren Niederschlag findet. Die Zustandsgleichungen werden mit dieser Verteilungsfunktion berechnet.

Das so gewonnene Gleichungssystem für eine beliebige Zahl von Momenten wird dann daraufhin untersucht, welche Momente zur korrekten Berechnung des Energie- und Impulstransportes notwendig sind. Dazu werden einfache Probleme untersucht, für welche die Momentengleichungen *und* die Strahlungs-Transport-Gleichung gelöst werden können. Die Ergebnisse werden verglichen und daraus werden Schlüsse auf die notwendigen Variablen gezogen. Diese Betrachtungen werden ergänzt um Untersuchungen der Struktur des Gleichungssystems, aus denen sich weitere Einschränkungen gewinnen lassen.

Insbesondere folgt aus diesen Überlegungen, daß es lediglich im Grenzfall des Strahlungsgleichgewichts genügt, nur Energie und Impuls als Variablen zu wählen. In diesem Fall bestätigt die neue Theorie die klassische Theorie des Strahlungsgleichgewichts, insbesondere das Rosseland-Mittel. Im Fall des lokalen Nichtgleichgewichts muß der Variablensatz deutlich erweitert werden.

Als Folge der aus dem Entropiemaximumprinzip bestimmten Verteilungsfunktion, die einer Reihenentwicklung mit den Momenten als Koeffizienten entspricht, sind die Momentengleichungen durch Matrizen von mittleren Absorptions- und Streukoeffizienten gekoppelt. Diese Kopplung ist bisher in der Literatur der Strahlungsthermodynamik nicht bekannt und als das wichtigste Ergebnis der Arbeit anzusehen. Im Verlauf der Arbeit wird gezeigt, daß erst diese Kopplung eine Übereinstimmung zwischen Lösungen der Momentengleichungen und Lösungen der Strahlungs-Transport-Gleichung liefert.

Überblick

Die Arbeit teilt sich in vier Teile und einen Anhang.

Teil I bietet EINE KURZE EINFÜHRUNG IN DIE STRAHLUNGSTHERMODYNAMIK. Im ersten Kapitel werden die *Grundlegenden Konzepte* der Strahlungsthermodynamik vorgestellt. Es gibt eine Zusammenfassung bekannten Stoffes: Die in dieser Arbeit verwendete mikroskopische Beschreibung der Strahlung im Photonenbild und die Photonen-Verteilungsfunktion werden eingeführt. Nach einer kurzen Wiederholung der Theorie der Strahlung im thermischen Gleichgewicht wird die Strahlungs-Transport-Gleichung vorgestellt. Die Form des Produktionsterms dieser Gleichung wird erläutert und die spektralen Absorptions- und Streukoeffizienten definiert.

Das folgende Kapitel gibt einen ersten Einblick in die Theorie des *Energietransports in Gleichgewichtsnähe*. Die bekannte klassische Theorie von ROSSELAND wird der Entropiemaximummethode gegenübergestellt.

Dieser Teil schließt mit einem Kapitel, das sich mit der *Anbindung an die Materie* befaßt, also mit der Frage, wie die Gleichungen der Strahlungsthermodynamik an die thermodynamischen Gleichungen für die Materie koppeln. Insbesondere wird das H-Theorem für die Wechselwirkung von Strahlung und Materie bewiesen.

Den wesentlichen Inhalt der Arbeit präsentiert Teil II, der sich mit der MOMENTENMETHODE MIT ENTROPIEMAXIMIERUNG befaßt. *Momente und Momentengleichungen* werden definiert bzw. abgeleitet, dann wird aus dem *Entropiemaximumprinzip* die Verteilungsfunktion bestimmt. Diese stellt sich heraus als eine Entwicklung der Verteilungsfunktion in Potenzen der Frequenz und Kugelflächenfunktionen.

Damit lassen sich die geschlossenen *Feldgleichungssysteme* für beliebige Variablensätze angeben, die nun untersucht werden. Es wird gezeigt, daß die Gleichungen im *Lokalen Strahlungsgleichgewicht* die bekannten Ergebnisse reproduzieren, insbesondere das Rosseland-Mittel für den Absorptionkoeffizienten.

Die beiden letzten Kapitel dieses Teils befassen sich mit der Einschränkung der Momentenzahl. Es wird gezeigt, daß im Falle *Eingeschränkter Anisotropie* wenige Kugelflächenfunktionen zur Darstellung der Verteilungsfunktion benötigt werden. Insbesondere stellt sich heraus, daß dieser Fall von selbst eintritt, wenn die Zahl der Streuvorgänge die Zahl der Absorptionsprozesse deutlich überwiegt.

Die Frage, inwieweit die Verteilungsfunktion durch wenige Monome approximiert werden kann, wird an einem exemplarischen Experiment diskutiert, der *Plötzlichen Kompression von Strahlung* und ihrer anschließenden Annäherung an das Gleichgewicht durch Wechselwirkung mit Materie. Durch den Vergleich mit der Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung ergibt sich eine Abhängigkeit von der Form des spektralen Absorptionskoeffizienten. Für einige Absorptionskoeffizienten wird die Zahl der benötigten Monome angegeben.

Es stellt sich heraus, daß die ABSORPTION EINES SONNENSTRAHLES durch die bisher verwendete Verteilungsfunktion nicht gut beschrieben werden kann; diesem Problem ist Teil III gewidmet. Nach einer mikroskopischen Beschreibung des *Sonnenstrahles* wird eine dem Problem angepaßte Verteilungsfunktion angegeben. Aus den mit dieser Verteilungsfunktion abgeschlossenen Feldgleichungen wird die *Absorption eines Sonnenstrahles* berechnet (ohne Streuung). Hier werden wieder die Lösungen von Feldgleichungen und Strahlungs-Transport-Gleichung verglichen und ihre Übereinstimmung nachgewiesen. Für die *Absorption und Streuung* des Sonnenstrahles läßt sich die Strahlungs-Transport-Gleichung analytisch nicht lösen, wohl aber die Feldgleichungen. Für ein einfaches spektrales Absorptions- und Streuverhalten werden diese gelöst und die Lösung wird diskutiert.

Bisher wurden die Feldgleichungen nur für den Fall ruhender Materie im Schwerpunktsystem der Materie betrachtet. Dort haben sie die einfachste Form, was den Anlaß gab, erst diesen Fall zu behandeln. Um diese Einschränkung zu verlassen, ist es sinnvoll, gleich die KOVARIANTEN MOMENTENGLEICHUNGEN aufzustellen. In Teil IV werden kurz die *Kovarianten Gleichungen für die Materie* behandelt und im Anschluß daran dann die *Kovarianten Gleichungen für die Strahlung*. Strahlungs-Transport-Gleichung, Momente und Momentengleichungen werden kovariant angegeben. Es zeigt sich, daß zum Abschluß der kovarianten Momentengleichungen auf die bisherigen Ergebnisse zurückgegriffen werden kann, so daß ohne weiteren Aufwand ein geschlossenes Feldgleichungssystem entsteht. Die Gleichungen werden auch für den Fall angegeben, daß die Materiegeschwindigkeit für den Beobachter wesentlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Sie werden in dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

Den Abschluß bildet die Diskussion einer *Nichtlinearen 4-Feld-Theorie* der Strahlungsthermodynamik, zu deren Kritik es des relativistischen Formalismus' bedarf. Es wird gezeigt, daß die Nichtlinearitäten die Folge von Transformationen zwischen Beobachtersystemen sind, die von den Autoren dieser Theorie fehlinterpretiert werden.

Die einzelnen Abschnitte des ANHANGS werden aus dem Text heraus angesprochen. Sie enthalten entweder Bekanntes oder den Text sprengende Berechnungen. Er entstand in der Absicht, die Arbeit so weit in sich geschlossen zu gestalten wie möglich. Hier sei nur hingewiesen auf den Abschnitt, der sich der Frage *Gibt es eine Strahlungstemperatur?* widmet.

Inhaltsverzeichnis

I	Eine kurze Einführung in die Strahlungsthermodynamik	1
1	Grundlegende Konzepte	2
1.1	Strahlung im Welle-Teilchen-Dualismus	2
1.2	Photonen	3
1.3	Die Photon-Verteilungsfunktion	4
1.4	Strahlung im Gleichgewicht	5
1.5	Die Strahlungs-Transport-Gleichung	7
1.6	Absorption, Emission und Streuung	7
2	Energietransport in Gleichgewichtsnähe	13
2.1	Planck- und Rosseland-Mittelung	14
2.2	Momentenmethode	15
2.3	Vergleich der Methoden	16
3	Anbindung an die Materie	18
3.1	Massen-, Impuls- und Energiebilanz	18
3.2	Materialgleichungen	19
3.3	Das H-Theorem	20
II	Die Momentenmethode mit Entropiemaximierung	23
4	Momente und Momentengleichungen	24
4.1	Momente der Verteilungsfunktion	24
4.2	Momentengleichungen im Ruhesystem	25
4.3	Das Abschlußproblem	26
5	Das Entropiemaximumprinzip	28
5.1	Voraussetzungen	28
5.2	Das Prinzip	29
5.3	Invertierbarkeit	30
5.4	Näherung der Nichtgleichgewichtsverteilung	30
5.5	Entropie, Entropiefluß und Entropieproduktion	32
5.6	Entwicklung der Verteilungsfunktion um eine andere Temperatur	34

6	Feldgleichungssysteme	36
6.1	Zustandsgleichungen für Momente	36
6.2	Berechnung der Produktionen	37
6.3	Feldgleichungen	40
7	Lokales Strahlungsgleichgewicht	43
7.1	Voraussetzungen	43
7.2	Maxwell-Iteration	44
7.3	Bewertung	46
8	Eingeschränkte Anisotropie	48
8.1	Eindimensionale Feldgleichungen	49
8.2	Wellenlösungen	51
8.3	Reduktion von N	54
9	Plötzliche Kompression von Strahlung	58
9.1	Ein exemplarisches Experiment	58
9.2	Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung	59
9.3	Planck und Rosseland-Mittelung	60
9.4	Lösung der Momentengleichungen	62
III	Absorption und Streuung eines Sonnenstrahles	65
10	Ein Sonnenstrahl	66
10.1	Verteilungsfunktion im Abstand r von der Sonne	66
10.2	Energie und Energiefluß	67
10.3	Entropie und Entropiefluß	68
10.4	Momente im Abstand r	68
10.5	Temperatur eines Hohlraumes im Abstand r	69
11	Absorption eines Sonnenstrahles	71
11.1	Problemstellung	71
11.2	Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung	72
11.3	Angepaßte Näherung der Verteilungsfunktion	72
11.4	Lösung der Momentengleichungen	73
12	Absorption und Streuung	78
12.1	Momentengleichungen	78
12.2	Ausbreitung eines Strahlungspulses	79

IV	Kovariante Momentengleichungen	82
13	Kovariante Gleichungen für die Materie	83
13.1	Teilchenzahlbilanz	84
13.2	Energie-Impuls-Tensor	85
14	Kovariante Gleichungen für die Strahlung	88
14.1	Strahlungs-Transport-Gleichung	88
14.2	Momente	90
14.3	Momentengleichungen für die Strahlung	92
14.4	Das Abschlußproblem	93
14.5	Entropie	94
14.6	Produktionen	95
14.7	Der Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten	96
14.8	Momente im Laborsystem	98
14.9	Feldgleichungen für lokales Strahlungsgleichgewicht	100
15	Die nichtlineare 4-Feld-Theorie	102
15.1	Der Eddington-Faktor	103
15.2	Entropiemaximumprinzip	103
15.3	Diskussion	104
15.4	Relativistische Betrachtung	105
15.5	Kritik	107
	Anhang	108
A	Entropie und Entropiebilanz	110
A.1	Statistische Definition der Entropie	110
A.2	Die Entropiebilanz	111
B	Absorption und Emission in Gasen	112
B.1	Verteilungsfunktion des Gases	112
B.2	Absorption, spontane und erzwungene Emission	113
B.3	Gleichgewicht: Einstein-Koeffizienten	115
B.4	Nichtgleichgewicht: Der Relaxationszeitansatz	117
B.5	Doppler-Verbreiterung von Linienspektren	118
C	Kugelflächenfunktionen	120
C.1	Vollständig spurfreie symmetrische Tensoren	120
C.2	Kugelflächenfunktionen im Euklidischen Raum	122
D	Phänomenologische Erweiterte Thermodynamik	124

D.1	Voraussetzungen	124
D.2	Das Entropieprinzip	126
D.3	Auswertung des Entropieprinzips	127
E	f_{\max} als Lösung der Strahlungs–Transport-Gleichung	129
F	Verteilungsfunktion außerhalb eines Hohlraumes	134
G	Gibt es eine Strahlungstemperatur?	137
G.1	Entropieproduktion und Planck-Temperatur	137
G.2	Entropie und Entropiefluß	138
G.3	Mittlere Planck-Temperatur	139
H	Grundlegende Begriffe der Relativitätstheorie	140
H.1	Spezielle Relativitätstheorie	140
H.2	Allgemeine Relativitätstheorie	145
	Literatur	152

Teil I

Eine kurze Einführung in die Strahlungsthermodynamik

Kapitel 1

Grundlegende Konzepte

1.1 Strahlung im Welle-Teilchen-Dualismus

Zwar hatte schon NEWTON gesagt, Licht bestünde aus Teilchen, doch konnte sich diese Ansicht lange Zeit nicht durchsetzen. Mit dem Nachweis von Beugung und Interferenz, die im Wellenbild erklärbar sind, schien NEWTON ins Unrecht gesetzt zu sein.

Ihren Höhepunkt erreichte die Beschreibung von Strahlung im Wellenbild mit MAXWELLS Theorie der elektromagnetischen Wellen. Mit dieser Theorie war es nicht nur möglich, schon bekannte Effekte zu beschreiben, sondern auch, neue zu entdecken. Man denke etwa an den Nachweis der Radiowellen durch HERTZ.

Bald jedoch wurden Beobachtungen gemacht, die sich mit dieser Theorie nicht beschreiben ließen, z.B. die scharfen Absorptionsspektren mancher Stoffe und der Lichtelektrische Effekt (Photoeffekt). Beim Photoeffekt wurde festgestellt, daß die Energie der ausgelösten Elektronen nur durch die Frequenz des auslösenden Lichtes, ihre Anzahl jedoch durch die Lichtintensität bestimmt wird.

Den Widerspruch zur Wellentheorie des Lichtes, nach der die Intensität, also die auf eine Fläche einfallende Energie des Lichtes, die Energie der ausgelösten Elektronen bestimmen sollte, konnte EINSTEIN klären. Dazu griff er auf die von PLANCK bereits in seiner Erklärung der Hohlraumstrahlung postulierten Energiequanten zurück. Danach war der Photoeffekt zu erklären, wenn Licht aus Teilchen besteht, den Photonen.

Die in dieser Arbeit zu beschreibenden Phänomene können sowohl im Teilchenbild als auch im Wellenbild beschrieben werden; in der zitierten Literatur ist keine eindeutige Vorliebe der

Autoren für das eine oder das andere Modell festzustellen. Das Teilchenbild erlaubt eine eng an die kinetischen Gastheorie angelehnte Beschreibung der Strahlung. Deshalb werden wir uns weitgehend auf das Teilchenbild beschränken.

1.2 Photonen

Photonen werden durch ihre Frequenz und ihre Ausbreitungsrichtung vollständig beschrieben: Ein Strahl der Frequenz ω in Richtung n_i besteht aus Photonen der Energie

$$E_{Ph} = \hbar\omega \quad (1.1)$$

und des Impulses¹

$$p_i^{Ph} = \frac{\hbar\omega}{c}n_i, \quad (1.2)$$

$\hbar = h/2\pi$ und h ist die Plancksche Konstante. c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit, die wir im Folgenden als konstant ansehen, d.h. wir vernachlässigen Dispersion und Brechung der Strahlung.

Es ist üblich, die Eigenschaften eines Photons in einem Vektor, dem Wellenvektor k_i , zusammenzufassen,

$$k_i = kn_i \quad , \quad k = \sqrt{k_i k_i} \quad . \quad (1.3)$$

Frequenz und Wellenvektor sind über die Dispersionsrelation $\omega = ck$ verknüpft. Es folgt für Energie und Impuls

$$E_{Ph} = \hbar ck, \quad (1.4)$$

$$p_i^{Ph} = \hbar k_i. \quad (1.5)$$

Der Betrag k des Wellenvektors wird als Wellenzahl bezeichnet. Aufgrund der Dispersionsrelation sind "ω-Abhängigkeit" und "k-Abhängigkeit" Synonyme.

Für das dreidimensionale Integrationselement im \mathbf{k} -Raum gilt

$$d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega. \quad (1.6)$$

Der Raumwinkel $d\Omega$ kennzeichnet ein Element auf der Einheitskugel,

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.7)$$

Da wir uns in dieser Arbeit auf unpolarisierte Strahlung beschränken, benötigen wir keine weiteren Größen zur Charakterisierung der Strahlung.

¹In dieser Arbeit wird durchweg der Tensor-Index-Formalismus mit der Einsteinschen Summationskonvention verwendet, siehe z.B. [27].

1.3 Die Photon-Verteilungsfunktion

Die Photon-Verteilungsfunktion $f(x_i, t, k_i)$ ist so definiert, daß

$$dN = f(x_i, t, k_i) d\mathbf{x} d\mathbf{k} \quad (1.8)$$

die Zahl von Photonen mit Wellenvektoren aus dem Intervall $(k_i, k_i + dk_i)$ ist, die sich zur Zeit t an Orten im Intervall $(x_i, x_i + dx_i)$ befinden.

Manchmal wird die Photon-Verteilungsfunktion $\hat{f}(x_i, t, p_i^{Ph})$ so definiert, daß

$$dN = \hat{f}(x_i, t, p_i^{Ph}) d\mathbf{x} d\mathbf{p}^{Ph} \quad (1.9)$$

die Zahl von Photonen mit Impulsen aus dem Intervall $(p_i^{Ph}, p_i^{Ph} + dp_i^{Ph})$ ist, die sich zur Zeit t an Orten im Intervall $(x_i, x_i + dx_i)$ aufhalten. Der Zusammenhang zu unserer Definition ist gegeben durch $\hat{f} = 1/\hbar^3 f$.

Oft wird in der Literatur nicht über die Photonen-Verteilungsfunktion gesprochen, sondern über die Intensität $I(x_i, t, \omega, n_i)$, die so definiert ist, daß

$$I(x_i, t, \omega, n_i) \cos \vartheta d\omega d\Omega dA dt \quad (1.10)$$

die während der Zeit dt von Strahlung aus dem Frequenzintervall $(\omega, \omega + d\omega)$ in den Raumwinkel $d\Omega$ um n_i durch ein Flächenelement dA transportierte Energie ist. ϑ ist der Winkel zwischen n_i und der Flächennormale. Die Definition (1.10) hat historische Gründe, denn (1.10) ist eine meßbare Größe. Mit

$$d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = \omega^2/c^3 d\omega d\Omega \quad (1.11)$$

folgt

$$I = \frac{\hbar\omega^3}{c^2} f. \quad (1.12)$$

Aus der Verteilungsfunktion lassen sich durch Integration anschauliche Mittelwerte bilden, etwa die Energiedichte

$$e = \int E_{Ph} f d\mathbf{k} = \int \hbar ck f d\mathbf{k}, \quad (1.13)$$

die Impulsdichte

$$p_i = \int p_i^{Ph} f d\mathbf{k} = \int \hbar k_i f d\mathbf{k}, \quad (1.14)$$

der Energiefluß

$$Q_i = c^2 p_i = c^2 \int \hbar k_i f d\mathbf{k} \quad (1.15)$$

oder der Drucktensor (Impulsflußdichte)

$$N_{ij} = \int \hbar ck n_i n_j f d\mathbf{k}; \quad (1.16)$$

für den Strahlungsdruck gilt

$$p = \frac{1}{3} N_{ii} = \frac{1}{3} e. \quad (1.17)$$

Die Entropiedichte der Strahlung folgt aus der Verteilungsfunktion als (Anhang A)

$$h = -k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k}, \quad (1.18)$$

mit

$$y = 2 / (2\pi)^3, \quad (1.19)$$

k_B ist die Boltzmann-Konstante. Der Entropiefluß der Strahlung ist gegeben durch

$$\phi_i = -k_{BC} \int n_i \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k}, \quad (1.20)$$

1.4 Strahlung im Gleichgewicht

Bevor wir uns der Strahlung im Nichtgleichgewicht widmen, wollen wir kurz die Theorie der Gleichgewichtsstrahlung betrachten, also von Strahlung, die mit Materie der Temperatur T im Gleichgewicht steht. Für Experimente besonders geeignet ist die Strahlung im Innern eines Hohlraumes, die mit den Wänden des Hohlraumes (Temperatur T) im Gleichgewicht steht. Daher wird die Gleichgewichtsstrahlung oft als Hohlraumstrahlung bezeichnet.

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ist der Zusammenhang zwischen der Energiedichte der Gleichgewichtsstrahlung und der Temperatur T gegeben durch

$$e_{|E}(T) = a T^4. \quad (1.21)$$

Dieses Gesetz wurde von STEFAN im Jahre 1879 anhand von Experimenten festgestellt. Dazu ist zu sagen, daß nicht die Energiedichte selbst gemessen werden kann, sondern nur die Energie der aus einer Öffnung im Hohlraum austretenden Strahlung. Dabei ist darauf zu achten, daß die Öffnung klein genug ist, so daß das Gleichgewicht im Hohlraum nicht gestört wird. Die pro Zeiteinheit durch eine Fläche $n_i^A dA$ fließende Energie ist gegeben durch (1.15)

$$Q_i n_i^A dA = \hbar c^2 \int k n_i n_i^A f_{|E} k^2 dk d\Omega dA. \quad (1.22)$$

Ist ϑ der Winkel zwischen Flächennormale und Ausbreitungsrichtung, also $n_i n_i^A = \cos \vartheta$, dann fließt durch die Öffnung eines Hohlraums pro Zeit- und Flächeneinheit die Energie

$$Q_i n_i^A = \hbar c^2 \int k^3 f_{|E} dk \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (1.23)$$

$$= \pi c \frac{e_{|E}}{4\pi} = \frac{ca}{4} T^4 = \sigma_{SB} T^4. \quad (1.24)$$

Die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma_{SB} = ca/4$ hat nach Messungen einen Wert von

$$\sigma_{SB} = 5.6703 \cdot 10^{-8} \frac{J}{sm^2 K^4}. \quad (1.25)$$

Der Proportionalitätsfaktor in (1.21) ergibt sich damit zu

$$a = \frac{4\sigma_{SB}}{c} = 7.5604 \cdot 10^{-16} \frac{J}{m^3 K^4}. \quad (1.26)$$

Diese Größe wird als Strahlungskonstante bezeichnet.

BOLTZMANN konnte das von STEFAN gefundene Gesetz thermodynamisch begründen [46].

Mit verfeinerten Meßtechniken war es bald möglich, nicht nur die frequenzintegrierte Energiedichte $e_{|E}(T)$ zu messen, sondern auch die frequenzabhängige Energiedichte

$$e_{|E}(k, T) = \hbar c \int k^3 f_{|E} d\Omega. \quad (1.27)$$

Es gelang PLANCK, das Ergebnis der Messungen theoretisch zu begründen, indem er annahm, daß die Materie Energie nur in Quanten $\hbar\omega$ absorbieren und emittieren kann.

Wir verzichten hier auf die Herleitung von PLANCK, sondern leiten umgekehrt die Planck-Verteilung aus der Definition der Entropie (1.18) ab. Die hier verwendete Methode werden wir später auf das Nichtgleichgewicht ausdehnen.

Wir wissen, daß die Entropie (1.18) im Gleichgewicht ein Maximum annimmt, und daß für die Energiedichte im Gleichgewicht gilt

$$e_{|E} = aT^4 = \int \hbar c k f_{|E} d\mathbf{k}. \quad (1.28)$$

Nach den Messungen hängt die Strahlungsverteilung im Gleichgewicht nur von der Temperatur (bzw. der Energiedichte) ab. Wir müssen also (1.18) unter der Nebenbedingung (1.13) maximieren. Mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators Λ machen wir uns von der Nebenbedingung frei und maximieren

$$\Phi = -k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k} - \Lambda \left[\int \hbar c k f d\mathbf{k} - e \right] \quad (1.29)$$

bezüglich f ohne Nebenbedingungen. Es ergibt sich die Verteilungsfunktion zunächst als

$$f_{|E} = \frac{y}{\exp \Lambda \frac{\hbar c k}{k_B} - 1}. \quad (1.30)$$

Einsetzen dieser Funktion in die Nebenbedingung (1.28) liefert mit (1.19)

$$\Lambda^4 = \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3} \frac{1}{aT^4}. \quad (1.31)$$

Mit den bekannten Werten von a , k_B und \hbar ergibt sich der Lagrange-Multiplikator zu $\Lambda = 1/T$ und die Planck-Verteilung lautet

$$f_{|E} = \frac{y}{\exp \frac{\hbar c k}{k_B T} - 1}. \quad (1.32)$$

Die gemessene Funktion $e_{|E}(k, T)$ ergibt sich zu

$$e_{|E}(k, T) = \frac{4\pi y \hbar c k^3}{\exp \frac{\hbar c k}{k_B T} - 1} \quad (1.33)$$

in hervorragender Übereinstimmung mit den Messungen. Für die Entropiedichte erhalten wir

$$h_{|E} = \frac{4}{3} a T^3. \quad (1.34)$$

Da die Hohlraumstrahlung mit der Materie im Gleichgewicht steht, für die eine Temperatur definiert ist, und zwei Körper im Gleichgewicht dieselbe Temperatur haben, können wir der Strahlung im Gleichgewicht eine Temperatur zuordnen. Im Nichtgleichgewichtsfall wird das nicht so einfach möglich sein (siehe Anhang G).

1.5 Die Strahlungs-Transport-Gleichung

Die Photonenzahldichte f ist gegeben durch die Strahlungs-Transport-Gleichung [8][35][40]²

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c n_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \mathcal{S}. \quad (1.35)$$

$\mathcal{S} d\mathbf{k}$ ist die Produktionsdichte von Photonen mit Wellenvektor k_i . Da Photonen nicht untereinander wechselwirken, resultiert sie nur aus der Wechselwirkung der Photonen mit Materie, also aus Absorption, Emission und Streuung. \mathcal{S} ist eine Funktion des Wellenvektors k_i und der Materialeigenschaften wie Dichte und Temperatur. In der Regel gibt es verschiedene physikalische Prozesse, die zu \mathcal{S} beitragen. Sei $\mathcal{S}_\alpha d\mathbf{k}$ die Produktionsdichte von Photonen aus einem Wechselwirkungsmechanismus α , dann gilt

$$\mathcal{S} = \sum_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha. \quad (1.36)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht muß die Produktionsdichte verschwinden,

$$\mathcal{S}_{|E} = 0. \quad (1.37)$$

1.6 Absorption, Emission und Streuung

Wir wollen die Produktionsdichten für einige grundlegende Wechselwirkungsprozesse angeben. Hier müssen wir unterscheiden zwischen Emissions- bzw. Absorptionsprozessen, bei denen Photonen erzeugt bzw. vernichtet werden, und Streuprozessen, bei denen die Photonenzahl erhalten bleibt.

²Wird Dispersion und Brechung der Strahlung berücksichtigt ($c \neq const.$), enthält die linke Seite der Gleichung einige Modifikationen, siehe dazu [42].

Wir werden die Produktionsdichten zunächst nur im Ruhesystem der Materie angeben. D.h. insbesondere, daß k und n_i die von einem Beobachter in diesem System gemessenen Wellenzahlen bzw. Richtungsvektoren kennzeichnen. Damit haben wir dann die Strahlungs-Transport-Gleichung im Ruhesystem der Materie formuliert. Der Übergang zu beliebigen Beobachtersystemen verlangt eine sorgfältige Berücksichtigung von Doppler-Effekt und Aberration. Die dazu notwendige Einbettung der Theorie in die Relativitätstheorie werden wir erst in Teil IV dieser Arbeit durchführen.

1.6.1 Spontane und erzwungene Emission, Absorption

Für alle Emissions- und Absorptionsprozesse gilt³

$$\mathcal{S}_{A/E} = \varepsilon_S + \varepsilon_Z f - \kappa' f, \quad (1.38)$$

$\varepsilon_S d\mathbf{k}$ ist die pro Zeit emittierte Photonendichte aus spontaner Emission, $\varepsilon_Z f d\mathbf{k}$ ist die aufgrund erzwungener Emission emittierte Photonendichte und $\kappa' f d\mathbf{k}$ ist die absorbierte Photonendichte. κ' ist der wahre Absorptionskoeffizient.

Im thermischen Gleichgewicht gilt

$$0 = \mathcal{S}_{A/E|E} = \varepsilon_S + \varepsilon_Z f_{|E} - \kappa' f_{|E} \Rightarrow f_{|E} = \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_Z} \frac{1}{\frac{\kappa'}{\varepsilon_Z} - 1} \quad (1.39)$$

und mit (1.32) muß dann gelten

$$\varepsilon_S = y \varepsilon_Z = \frac{\kappa' y}{\exp \frac{\hbar c k}{k_B T}}, \quad (1.40)$$

Es folgt, daß wir schreiben können

$$\mathcal{S}_{A/E} = -\kappa (f - f_{|E}) \quad \text{mit} \quad \kappa = \kappa' \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar c k}{k_B T} \right) \right). \quad (1.41)$$

heißt effektiver Absorptionskoeffizient⁴. Die einfache Form (1.41) gilt nur, wenn die absorbierende Materie für sich im lokalen Gleichgewicht steht, siehe dazu die detailliertere Diskussion in Anhang B⁵.

³Die von uns verwendeten Symbole für Emissionsvermögen und Absorptionskoeffizienten sind die in der Literatur üblichen. Es ist allerdings darauf zu achten, daß wir das Emissionsvermögen für die Verteilungsfunktion und nicht wie üblich für die Intensität formulieren. Die von uns verwendeten Absorptionskoeffizienten κ folgen aus den Literaturwerten κ_{Lit} durch $\kappa = \varrho \kappa_{Lit}$, wobei ϱ die Dichte der Materie ist.

⁴Chandrasekar [7] bezeichnet den wahren und den effektiven Absorptionskoeffizienten gerade umgekehrt.

⁵Eine kinetische Theorie von Strahlung *und* Materie im Nichtgleichgewicht findet sich in [16], allerdings werden dort die Wechselwirkungsterme nicht ausgewertet.

1.6.2 Absorptionsspektren

Eines der Ziele dieser Arbeit ist die Berechnung von mittleren Absorptionskoeffizienten aus spektralen Absorptionskoeffizienten. Letztere sind für wichtige Prozesse der Literatur zu entnehmen. Der effektive Absorptionskoeffizient ist gegeben durch die Summe über die Absorptionskoeffizienten der verschiedenen Prozesse (Zählvariable α),

$$\kappa = \sum_{\alpha} \kappa_{\alpha}. \quad (1.42)$$

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Betrachtung ausgewählter, physikalisch wichtiger Absorptionsvorgänge.

Graue Materie

Die einfachste Modellvorstellung für die Wechselwirkung ist ein in jeder Frequenz gleichmäßig absorbierendes Gas, d.h.

$$\kappa_{GM} = \varrho \cdot \text{const.} \quad (1.43)$$

Der Absorptionskoeffizient ist proportional zur Materiedichte ϱ . Ein solches Gas ist in der Natur jedoch nicht realisiert.

Absorption nach einem Potenz-Gesetz

Als ein einfaches Beispiel für spätere Rechnungen verwenden wir Absorptionskoeffizienten der Art

$$\kappa_{PG}^{\nu} = \kappa_{PG}^0 k^{\nu}, \quad \nu = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1.44)$$

$$\kappa_{PG}^0 \sim \varrho \quad (1.45)$$

Durch Überlagerung verschiedener Spektren dieser Art kann auch ein komplizierteres Absorptionsverhalten dargestellt werden.

Gebunden-Frei-Übergänge (Photoionisierung)

Bei der Ionisation eines Atoms oder Ions durch Photonen ergibt sich ein Absorptionskoeffizient [7][47]

$$\kappa_{bf} = \begin{cases} D_{bf}(Z, n) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\hbar ck}{k_B T}\right)}{k^3} & , \quad \hbar ck \geq \hbar ck_n \\ 0 & \hbar ck \leq \hbar ck_n \end{cases} \quad (1.46)$$

$$D_{bf}(Z, n) = A(Z, n) \varrho(Z, n). \quad (1.47)$$

Dabei ist der Faktor $D(Z, n)$ eine Funktion der Ladung Z und des Quantenzustandes n der Ionen und $\varrho(Z, n)$ ist ihre Dichte; $\hbar ck_n$ ist die mindestens notwendige Ionisierungsenergie. Der Zusammenhang der Konstanten $A(Z, n)$ mit atomaren Konstanten ist der angegebenen Literatur zu entnehmen. Für ein reales Ion ergeben sich eine Vielzahl von Ausdrücken dieser Art, die als Gesamtheit das Ionisierungsspektrum beschreiben.

Frei-Frei-Übergänge (Bremsstrahlung)

Für die Absorption von Bremsstrahlung, also für die Wechselwirkung von Photonen mit freien Elektronen in der Nähe eines schweren Ions oder Atoms, ergibt sich ein ähnlicher Ausdruck [4][7],

$$\kappa_{ff} = D_{ff}(Z, n) \frac{1 - \exp\left(-\frac{\hbar ck}{k_B T}\right)}{k^3}, \quad (1.48)$$

$$D_{ff}(Z, n) = B(Z, n) \varrho n_{el}. \quad (1.49)$$

Die Absorption und Emission von Bremsstrahlung ist der wichtigste Prozeß in sehr heißen Plasmen [49]. Der Zusammenhang der Konstanten $B(Z, n)$ mit atomaren Konstanten ist der angegebenen Literatur zu entnehmen, n_{el} ist die Zahldichte der freien Elektronen.

1.6.3 Streuung

Bei Streuvorgängen werden Photonen nicht erzeugt und vernichtet, sondern nur in ihrer Flugrichtung und ihrer Frequenz beeinflußt. Wir betrachten in dieser Arbeit nur elastische Streuung von Photonen, d.h. Streuprozesse, bei denen die Frequenz des Photons sich nicht ändert.

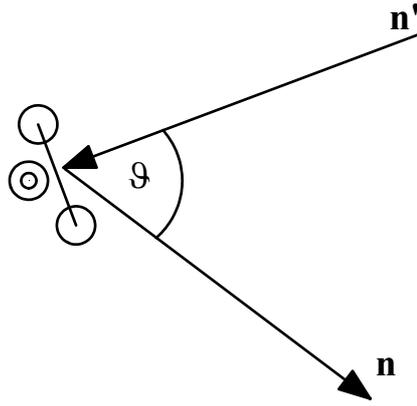


Abbildung 1.1: Zur Geometrie des Streuvorganges

Zur Berechnung des Wechselwirkungsterms betrachten wir Abb. 1.1. Unpolarisiertes Licht der Richtung n'_i fällt auf das streuende Teilchen und induziert im Teilchen zwei Dipol-Schwingungen gleicher Amplitude. Die Achsen beider Dipole liegen senkrecht zur Einfallrichtung n'_i . Da in unpolarisiertem Licht keine Polarisationsrichtung ausgezeichnet ist, können die Achsen der Dipole so gelegt werden, daß ein Dipol in der durch die Abstrahlrichtung n_i und die Einfallrichtung n'_i aufgespannten Ebene schwingt (die Hantel in der Abb.) und der andere senkrecht dazu (durch den Doppelkreis gekennzeichnet). Wir fragen nach der Energieabstrahlung in Richtung n_i .

Bezeichnen wir den Streuquerschnitt des Teilchens mit σ , dann beträgt die pro Zeiteinheit auf das Teilchen einfallende und an ihm gestreute Strahlungsenergie mit Wellenzahl k und Richtungsvektor n'_i :

$$P = \sigma \hbar c^2 k f(k, n'_i) k^2 dk d\Omega'. \quad (1.50)$$

Ist θ der Winkel zwischen der Dipolachse und der Abstrahlrichtung, dann ist die Abstrahlung eines schwingenden Dipols proportional zu $\sin^2 \theta$ [5]. Der Abbildung entnehmen wir $\theta = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ für den in der Zeichenebene schwingenden Dipol und $\theta = \frac{\pi}{2}$ für den anderen. Die in Richtung n_i von beiden Dipolen abgestrahlte Leistung ergibt sich also zu

$$\frac{3}{16\pi} P (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega, \quad (1.51)$$

der Faktor $\frac{3}{16\pi}$ dient der Normierung, $\frac{3}{16\pi} \int (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega = 1$.

Indem wir P durch (1.50) ersetzen und über alle Einfallrichtungen n'_i integrieren, erhalten wir die gesamte von *einem* Teilchen aufgrund von Streuung in Richtung n_i abgestrahlte Leistung zu

$$\frac{3}{16\pi} \sigma \hbar c^2 k \left[\int_{\Omega} (1 + \cos^2 \vartheta) f(k, n'_i) d\Omega' \right] k^2 dk d\Omega. \quad (1.52)$$

Die Zahl der streuenden Teilchen in $d\mathbf{x}$ ist gegeben durch $n d\mathbf{x}$ ($n = \varrho/m$ - Teilchenzahldichte). Die von diesen Teilchen der Strahlung (k, n_i) durch Streuung entnommene Energie pro

Zeiteinheit ist gegeben durch,

$$n\sigma\hbar c^2 k f(k, n_i) k^2 dk d\Omega d\mathbf{x}, \quad (1.53)$$

die zugeführte Energie pro Zeit hingegen durch

$$n\frac{3}{16\pi}\sigma\hbar c^2 k \int_{\Omega'} (1 + \cos^2 \vartheta) f(k, n'_i) d\Omega' k^2 dk d\Omega d\mathbf{x}. \quad (1.54)$$

Die Differenz der beiden letzten Ausdrücke liefert uns die Nettoproduktion von Strahlungsenergie mit Wellenzahl k und Richtung n_i ,

$$\hbar ck \mathcal{S}_{St} d\mathbf{k} d\mathbf{x} = -\hbar ck n \sigma c \left[f(k, n_i) - \frac{3}{16\pi} \int_{\Omega'} (1 + \cos^2 \vartheta) f(k, n'_i) d\Omega' \right] k^2 dk d\Omega d\mathbf{x} \quad (1.55)$$

Mit der Identität $\cos^2 \vartheta = n_i n'_i n_j n'_j = n_{\langle i} n_{j \rangle} n'_{\langle i} n'_{j \rangle} + \frac{1}{3}$ erhalten wir den Wechselwirkungsterm für Streuung als

$$\mathcal{S}_{St} = -\zeta \left[f(k, \mathbf{n}) - \frac{1}{4\pi} \int f(k, \mathbf{n}') d\Omega' - \frac{3}{16\pi} n_{\langle i} n_{j \rangle} \int n'_{\langle i} n'_{j \rangle} f(k, \mathbf{n}') d\Omega' \right]. \quad (1.56)$$

Die Indizes in den spitzen Klammern bezeichnen einen vollständig spurfreien symmetrischen Tensor, siehe dazu Anhang C. Oft wird auch die für isotrope Streuung vereinfachte Formel

$$\mathcal{S}_{St} = -\zeta \left(f - \frac{1}{4\pi} \int f(k, \mathbf{n}') d\Omega' \right) \quad (1.57)$$

verwendet.

Die Größe $\zeta = n\sigma c = \rho/m\sigma c$ heißt Streukoeffizient.

Es gilt für die Abhängigkeit von der Wellenzahl für die Rayleigh-Streuung an Teilchen [20]

$$\zeta_R = \zeta_R^0 k^4 \quad (1.58)$$

und für die Thomson-Streuung an Elektronen [49]

$$\zeta_T = \text{const.} \quad (1.59)$$

Kapitel 2

Energietransport in Gleichgewichtsnähe

Wir wollen die Beschreibung des Energietransportes durch Strahlung in der Nähe des Gleichgewichtes betrachten. Wir werden zwei Methoden gegenüberstellen, aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) eine Bilanzgleichung für die Strahlungsenergie aufzustellen: einmal die klassische Methode, die auf ROSSELAND zurückgeht und zum anderen die Methode der Entropiemaximierung.

Ausgangspunkt für beide Methoden ist die Strahlungs-Transport-Gleichung, die wir hier ohne Streuung im Ruhesystem der Materie betrachten, so daß die Produktion durch (1.41) gegeben ist,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + cn_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = -\kappa (f - f_{|E}). \quad (2.1)$$

Multiplikation mit der Photonenergie $\hbar ck$ und Integration über den \mathbf{k} -Raum liefert die Energiebilanz

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c^2 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} = P_e. \quad (2.2)$$

Energiedichte e und Impulsdichte p_k sind durch (1.13, 1.14) definiert und

$$P_e = - \int \kappa \hbar ck (f - f_{|E}) d\mathbf{k} \quad (2.3)$$

bezeichnet die Energieproduktion.

Unser Ziel ist es, für den Fall kleiner Abweichungen vom Gleichgewicht Gleichungen zu finden, die p_k und P_e auf die Energiedichte der Strahlung und auf die Materietemperatur zurückführen.

2.1 Planck- und Rosseland-Mittelung

Im Fall grauer Materie erhalten wir für (2.3)

$$P_e = -\kappa_{GM} (e - aT^4). \quad (2.4)$$

Es wird postuliert, daß auch sonst die Energieproduktion diese Form hat,

$$P_e = -\hat{\kappa} (e - aT^4). \quad (2.5)$$

Der mittlere Absorptionskoeffizient $\hat{\kappa}$ wird so bestimmt, daß gilt

$$\hat{\kappa} a T^4 = \int \kappa \hbar c k f_{|E} d\mathbf{k}, \quad (2.6)$$

oder

$$\hat{\kappa} = \frac{\int \kappa \hbar c k f_{|E} d\mathbf{k}}{\int \hbar c k f_{|E} d\mathbf{k}}. \quad (2.7)$$

Eine Mittelung gemäß der Vorschrift (2.7) wird als Planck-Mittelung bezeichnet. Zur Berechnung des Planck-Mittels wird nur die Gleichgewichtsverteilung verwendet. Diese Methode kann nur dann zu vernünftigen Ergebnissen führen, wenn die aktuelle Nichtgleichgewichtsverteilung f wenigstens näherungsweise die Bedingung

$$\frac{\int \kappa \hbar c k f d\mathbf{k}}{\int \hbar c k f d\mathbf{k}} = \hat{\kappa} \quad (2.8)$$

erfüllt, was im allgemeinen nicht zu erwarten ist. Daher sollte man das Planck-Mittel möglichst nicht verwenden, oder wenn, dann nur in der Nähe des Gleichgewichts.

Um einen Ausdruck für p_k zu finden, bedient man sich der Chapman-Enskog-Methode der kinetischen Gastheorie, die für den Fall so einfacher rechter Seiten der Boltzmann-Gleichung wie in (2.1) sehr einfach durchzuführen ist [19]. Es wird angenommen, daß lokal näherungsweise Strahlungsgleichgewicht vorliegt. Dann kann auf der linken Seite von (2.1) die Gleichgewichtsverteilung eingesetzt werden. Eine einfache Umformung liefert die Verteilungsfunktion

$$f = f_{|E} - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial f_{|E}}{\partial t} + c n_k \frac{\partial f_{|E}}{\partial x_k} \right). \quad (2.9)$$

Mit dieser Verteilungsfunktion berechnet man den Photonenimpuls gemäß (1.14) als

$$p_i = - \int \frac{1}{\kappa} \hbar c k n_i n_k \frac{\partial f_{|E}}{\partial x_i} d\mathbf{k}. \quad (2.10)$$

Nach einigen leichten Umformungen folgt

$$p_i = - \frac{1}{3} \frac{1}{\hat{\kappa}} \frac{\partial e_{|E}}{\partial x_i}, \quad (2.11)$$

mit $e_{|E} = aT^4$. $\check{\kappa}$ ist das sogenannte Rosseland-Mittel des Absorptionskoeffizienten, definiert durch

$$\check{\kappa} = \frac{\int \hbar c k^2 \frac{\partial f_{|E}}{\partial k} d\mathbf{k}}{\int \frac{1}{\kappa} \hbar c k^2 \frac{\partial f_{|E}}{\partial k} d\mathbf{k}}. \quad (2.12)$$

Alles was nun noch zu tun bliebe ist die Auswertung der Integrale, worauf wir an dieser Stelle verzichten, siehe dazu [7].

Die vorgestellte Methode liefert also zwei verschiedene Mittelungsvorschriften für die Absorptionskoeffizienten.

Die Grundlage der Methode ist die Annahme des lokalen thermischen Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie, die es erlaubt, auf der linken Seite der Strahlungs-Transport-Gleichung f durch $f_{|E}$ zu ersetzen. Für die Betrachtung von Prozessen mit einer deutlichen Abweichung vom lokalen Gleichgewicht ist diese Annahme nicht gestattet. Dann kann diese Methode nicht verwendet werden.

2.2 Momentenmethode

Die Momentenmethode mit Entropiemaximierung, die wir nun vorstellen, ist auf den ersten Blick deutlich umständlicher als die Chapman-Enskog-Methode. Jedoch gibt sie uns ein rationales Programm, das sich leicht für größere Abweichungen vom Gleichgewicht verallgemeinern läßt. Die Verallgemeinerung werden wir in Teil II dieser Arbeit vorstellen, wo wir die Methode systematisch erläutern und einige Beispiele rechnen werden, die die Güte der Methode belegen.

Hier verwenden wir sie ohne weitere Erläuterungen. Unser Ziel ist jetzt, den Energie- und Impulstransport der Strahlung durch die Bilanzen von Energie und Impuls zu beschreiben. Für dieses Problem ist das Vorgehen wie folgt: Zunächst bilden wir die Bilanz des Photonimpulses durch Multiplikation von (2.1) mit $\hbar k n_i$ und Integration,

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial N_{ik}}{\partial x_k} = P_{p_i}. \quad (2.13)$$

Der Drucktensor N_{ij} der Strahlung ist durch (1.16) gegeben und P_{p_i} bezeichnet die Impulsproduktion der Strahlung,

$$P_{p_i} = - \int \kappa \hbar k n_i (f - f_{|E}) d\mathbf{k}. \quad (2.14)$$

(2.2) und (2.13) bilden ein Gleichungssystem für e und p_i , wenn wir Gleichungen finden, die N_{ij} , P_e und P_{p_i} mit diesen Größen verknüpfen.

Wir nehmen an, daß der Zustand der Strahlung bekannt ist, wenn die Werte von e und p_i bekannt sind. Dann können wir die Verteilungsfunktion berechnen als diejenige Verteilungsfunktion, die die Entropie bei vorgegebenen Werten von e und p_i maximiert.

Wie bei der Berechnung der Gleichgewichtsverteilung berücksichtigen wir die Nebenbedingungen durch Lagrange-Multiplikatoren Λ , Λ_i und erhalten die Verteilungsfunktion

$$f = \frac{y}{\exp \frac{\hbar ck}{k_B} (\Lambda + n_i \Lambda_i) - 1}; \quad (2.15)$$

die Lagrange-Multiplikatoren müssen aus den Nebenbedingungen bestimmt werden.

Der Vergleich mit der Gleichgewichtsverteilung zeigt, daß im Gleichgewicht gilt $\Lambda_{|E} = 1/T$, $\Lambda_{i|E} = 0$. Für kleine Abweichungen vom Gleichgewicht können wir schreiben

$$\Lambda = \frac{1}{T} (1 + \lambda) \quad , \quad \Lambda_i = \frac{1}{T} \lambda_i \quad (2.16)$$

und die Verteilungsfunktion für kleine Werte von λ , λ_i entwickeln,

$$f = f_{|E} + \frac{\partial f_{|E}}{\partial \Xi_{|E}} \Xi_{|E} (\lambda + n_i \lambda_i), \quad (2.17)$$

mit $\Xi_{|E} = \hbar ck/k_B T$. Aus den Nebenbedingungen für e und p_i berechnen wir die Lagrange-Multiplikatoren als

$$\lambda = -\frac{e - e_E}{4e_E} \quad , \quad \lambda_i = -\frac{3c}{4e_E} p_i. \quad (2.18)$$

Damit ist die Verteilungsfunktion bekannt und wir können N_{ij} , P_e und P_{p_i} berechnen,

$$N_{ij} = \frac{e}{3} \delta_{ij}, \quad (2.19)$$

$$P_e = -\bar{\kappa} (e - e_E), \quad (2.20)$$

$$P_{p_i} = -\bar{\kappa} p_i. \quad (2.21)$$

Der mittlere Absorptionskoeffizient $\bar{\kappa}$ ergibt sich nach dieser Methode zu

$$\bar{\kappa} = \frac{\int \kappa \hbar ck^2 \frac{\partial f_{|E}}{\partial k} d\mathbf{k}}{\int \hbar ck^2 \frac{\partial f_{|E}}{\partial k} d\mathbf{k}}. \quad (2.22)$$

2.3 Vergleich der Methoden

Als ersten Unterschied zur Methode mit Planck- und Rosseland-Mittel stellen wir fest, daß die Momentenmethode mit Entropiemaximierung nur *eine* Mittelung des Absorptionskoeffizienten erfordert. Der für uns wichtigste Unterschied ist jedoch, daß die Momentenmethode mit

Entropiemaximierung nicht auf das Konzept des lokalen Strahlungsgleichgewichts angewiesen ist.

Um die quantitativen Ergebnisse beider Methoden zu vergleichen, betrachten wir die Impulsbilanz (2.13) mit (2.19, 2.21)

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial e}{\partial x_i} = -\bar{\kappa} p_i. \quad (2.23)$$

Unter der Annahme des lokalen Gleichgewichts können wir auf der linken Seite die Gleichgewichtswerte einsetzen. Wir erhalten dann ein (2.11) entsprechendes Ergebnis,

$$p_i = -\frac{1}{3} \frac{1}{\bar{\kappa}} \frac{\partial e|_E}{\partial x_i}. \quad (2.24)$$

Momentenmittel (2.22) und Rosseland- bzw. Planck-Mittel (2.7, 2.12) stimmen in der Temperaturabhängigkeit der mittleren Absorptionskoeffizienten überein, jedoch liefern sie verschiedene Zahlenwerte; z.B. gilt für Bremsstrahlungsabsorption $\check{\kappa}_{ff}/\bar{\kappa}_{ff} = 0.08036$ und $\hat{\kappa}_{ff}/\bar{\kappa}_{ff} = 2.43171$ (numerische Berechnung mit dem Absorptionskoeffizienten (1.48)). Es ist also zu entscheiden, welche Methode im Strahlungsgleichgewicht die richtige ist.

Wir werden später zeigen, daß die Momentenmethode nur dann gute Ergebnisse liefert, wenn der Theorie eine größere Zahl von Momenten zugrunde gelegt wird, anstatt wie hier nur e und p_i . Insbesondere werden wir in Kap. 7 den Strahlungsimpuls aus den Momentengleichungen im Grenzfall des lokalen Gleichgewichts berechnen. Für diesen ergibt sich ein Gesetz der Form (2.24), wobei der Wert des Koeffizienten $\bar{\kappa}$ mit dem Rosseland-Mittel übereinstimmt.

Die klassische Theorie des lokalen Strahlungsgleichgewichts stellt also den Grenzfall der in dieser Arbeit vorgestellten Theorie des lokalen Nichtgleichgewichts dar.

Kapitel 3

Anbindung an die Materie

Wir wollen den Einfluß der Strahlung auf die Materie, mit der sie wechselwirkt, beschreiben. Dabei beschränken wir uns auf einfache isotrope Medien, etwa Gase oder Newtonsche Flüssigkeiten. Wir verwenden hier die Methode der klassischen Thermodynamik Irreversibler Prozesse (TIP).

3.1 Massen-, Impuls- und Energiebilanz

Das Ziel der Nichtgleichgewichts-Thermodynamik ist die Berechnung von Massendichte $\varrho(x_i, t)$, Geschwindigkeit $v_k(x_i, t)$ und Temperatur $T(x_i, t)$ in allen Punkten x_i eines Körpers zu allen Zeiten t . Dazu stehen die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und (innerer) Energie zur Verfügung. Sie lauten in differentieller Form [36]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_i v_k - t_{ik}}{\partial x_k} = \varrho f_i - P_{pi}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u v_k + q_k}{\partial x_k} = t_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + r. \quad (3.3)$$

$u(x_i, t)$ ist die spezifische innere Energie, $q_i(x_i, t)$ der Wärmeflußvektor, $t_{ij}(x_i, t)$ der Spannungstensor und f_i ist eine Volumenkraftdichte, z.B. die Schwerkraft $f_i = \{0, 0, -g\}_i$.

Der Einfluß der Strahlung auf die innere Energie wird durch die Energie-Zufuhrdichte $r(x_i, t)$ beschrieben.

Die Impuls-Zufuhrdichte $-P_{pi}(x_i, t)$ berücksichtigt den zwischen Materie und Strahlung aus-

getauschten Impuls. Für Vorgänge auf der Erde ist dieser Term vernachlässigbar, auch wenn $r(x_i, t) \neq 0$ gilt. Da der Strahlungsdruck ein wesentlicher Faktor für die Größe von Sternen ist - er hält der Gravitation das Gleichgewicht - ist zur Beschreibung von Sternen ein solcher Term jedoch unverzichtbar.

Die Gleichungen (3.1-3.3) stellen kein geschlossenes System zur Berechnung der Felder ϱ , v_k , T dar, sondern sie müssen noch ergänzt werden durch Materialgleichungen, die die Größen u , q_i und t_{ij} mit den Feldern und ihren Gradienten verknüpfen. Zudem müssen die Volumenkraftdichte f_i und die Strahlungszufuhren r und $-P_{p_i}$ bekannt sein.

3.2 Materialgleichungen

Zur Einschränkung der Materialgleichungen dient die Entropiebilanz. In der klassischen Thermodynamik irreversibler Prozesse setzt man die Existenz der Gibbs-Gleichung

$$T \frac{ds(\varrho, T)}{dt} = \frac{du(\varrho, T)}{dt} - \frac{p(\varrho, T)}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt} \quad (3.4)$$

voraus (p ist der Druck), um aus ihr und den Erhaltungssätzen die Entropiebilanz der Materie zu erhalten [22][37],

$$\frac{\partial \varrho s}{\partial t} + \frac{\partial \varrho s v_k + \Phi_k}{\partial x_k} = \Sigma + \frac{r}{T}. \quad (3.5)$$

Dabei ist $s(x_i, t)$ die spezifische Entropie der Materie,

$$\Phi_k = \frac{q_k}{T} \quad (3.6)$$

ist der Entropiefluß und

$$\Sigma = -\frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + t_{ij} \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j \rangle}} + \left(\frac{1}{3} t_{ii} + p \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.7)$$

ist die Entropieproduktion in der Materie.

Der Term r/T wird als Entropiezufuhr bezeichnet. Je nach Vorzeichen von r kann die Entropiezufuhr positiv oder negativ sein.

Wenn die Wechselwirkung von Materie mit Strahlung vernachlässigbar ist ($r = 0$), genügt es, die Materie alleine zu betrachten. Dann muß die Entropieproduktion Σ positiv sein,

$$\Sigma \geq 0. \quad (3.8)$$

Ein Blick auf (3.7) zeigt, daß dies sichergestellt wird durch die (linearen) Materialgleichungen von FOURIER,

$$q_i = -\kappa_F \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.9)$$

und von NAVIER und STOKES,

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\eta \frac{\partial v_{\langle i}}{\partial x_{j\rangle}}, \quad (3.10)$$

mit positiven Koeffizienten κ_F, ν und η . Die Materialgleichungen für den Druck $p(\rho, T)$ und die spezifische innere Energie $u(\rho, T)$ müssen gemessen werden wie in der Gleichgewichtsthermodynamik.

Wir betrachten im folgenden Materie und Strahlung als ideale Mischung. Dies bedeutet, daß die Materialgleichungen der Materie durch die Strahlung nicht beeinflußt werden - die Materialgleichungen (3.9, 3.10) sollen also auch in Anwesenheit von Strahlung gelten. Daraus folgt, daß die Entropieproduktion in der Materie Σ stets positiv ist, daß also (3.8) auch gültig ist wenn Strahlung vorliegt.

Die Strahlungszufuhren r und $-P_{p_i}$ müssen aus der Strahlungsthermodynamik berechnet werden, etwa mit den Methoden des letzten Kapitels. Indem wir die Impulszufuhr als $-P_{p_i}$ geschrieben haben, haben wir die Impulserhaltung bereits garantiert. Die Energieerhaltung verlangt, daß die Gesamtenergieproduktion verschwindet. Diese setzt sich zusammen aus der Produktion an innerer Energie r der Materie, der Produktion an kinetischer Energie der Materie $-P_{p_i}v_i$ sowie aus der Produktion an Strahlungsenergie \widehat{P}_e im Laborsystem, also in dem System in dem die Materie die Geschwindigkeit v_i hat. In Teil IV dieser Arbeit werden wir zeigen, daß für letztere gilt $\widehat{P}_e = P_e + P_{p_i}v_i$, wobei P_e die Produktion an Strahlungsenergie im Ruhesystem der Materie ist, s. Gleichung (14.78)¹. Damit lautet die Bedingung für die Erhaltung der Gesamtenergie

$$r - P_{p_i}v_i + P_e + P_{p_i}v_i = 0, \quad (3.11)$$

also gilt

$$r = -P_e. \quad (3.12)$$

3.3 Das H-Theorem

Der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt aus, daß die Gesamtentropie eine additive Größe mit positiver Produktion ist. Aus der Definition der Entropie (1.18) und der Strahlungstransport-Gleichung folgt die Entropiebilanz für die Strahlung, s. Anhang A,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} = \sigma. \quad (3.13)$$

¹Die Impulsproduktion stimmt in beiden Systemen überein, wenn die Materiegeschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, s. Gl. (14.79).

$h(x_i, t)$ ist die Entropiedichte der Strahlung, $\phi_k(x_i, t)$ der Entropiefluß und $\sigma(x_i, t)$ die Entropieproduktion. Eine positive Produktion der Gesamtentropie ist gewährleistet wenn gilt

$$\Sigma + \frac{r}{T} + \sigma \geq 0. \quad (3.14)$$

Da die Entropieproduktion der Materie Σ alleine schon größer ist als Null (3.8), muß gelten

$$\sigma + \frac{r}{T} \geq 0. \quad (3.15)$$

Dabei ist r die dem Gas von der Strahlung zugeführte Energie. Sie ist gleich der der Strahlung im Ruhesystem entzogenen Energie

$$r = - \int \hbar c k \mathcal{S} d\mathbf{k}. \quad (3.16)$$

σ ist gegeben durch (A.9),

$$\sigma = k_B \int \ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) \mathcal{S} d\mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Wir schreiben (3.15) als

$$k_B \int \left[\ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) - \frac{\hbar c k}{k_B T} \right] \mathcal{S} d\mathbf{k} \geq 0. \quad (3.18)$$

Diese Bedingung muß für jeden Wechselwirkungsterm \mathcal{S}_α erfüllt sein.

Für Emissions-/Absorptionsprozesse erhalten wir mit

$$\frac{\hbar c k}{k_B T} = \ln\left(\frac{y}{f_E} + 1\right) \quad (3.19)$$

die Forderung

$$k_B \int \ln \frac{\left(\frac{y}{f} + 1\right)}{\left(\frac{y}{f_E} + 1\right)} \kappa (f_E - f) d\mathbf{k} \geq 0; \quad (3.20)$$

man überzeugt sich leicht, daß sie für alle $\kappa \geq 0$ erfüllt ist.

Streuprozesse tragen nicht zur Energiezufuhr bei, für sie muß die Entropieproduktion der Strahlung alleine positiv sein,

$$\sigma_{St} = k_B \int \ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) \mathcal{S}_{St} d\mathbf{k} \geq 0. \quad (3.21)$$

Mit dem Streuterm (1.56) können wir dies schreiben als

$$\sigma_{St} = -k_B \frac{1}{4\pi} \int \int \int \zeta k^2 \ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) \left[f - f' - \frac{3}{4} n_{\langle i} n_{\rangle j} n'_{\langle i} n'_{\rangle j} f' \right] d\Omega' d\Omega dk \quad (3.22)$$

mit $f = f(k, n_i)$ und $f' = f(k, n'_i)$. Mit der Identität $\int n'_{\langle i} n'_{\rangle j} d\Omega' = 0$ gilt auch

$$0 = -k_B \frac{1}{4\pi} \int \int \int \zeta k^2 \ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) \left[-\frac{3}{4} n_{\langle i} n_{\rangle j} n'_{\langle i} n'_{\rangle j} f \right] d\Omega' d\Omega dk \quad (3.23)$$

und σ_{St} kann geschrieben werden als

$$\sigma_{St} = k_B \frac{1}{4\pi} \int \int \int \zeta k^2 \ln\left(\frac{y}{f} + 1\right) \left[1 + \frac{3}{4} n_{\langle i} n_j \rangle n'_{\langle i} n'_{j} \rangle\right] (f' - f) d\Omega' d\Omega dk. \quad (3.24)$$

Durch Umbenennung der Integrationsvariablen ergibt sich die Alternativdarstellung

$$\sigma_{St} = -k_B \frac{1}{4\pi} \int \int \int \zeta k^2 \ln\left(\frac{y}{f'} + 1\right) \left[1 + \frac{3}{4} n_{\langle i} n_j \rangle n'_{\langle i} n'_{j} \rangle\right] (f' - f) d\Omega' d\Omega dk. \quad (3.25)$$

Aus der Addition der beiden letzten Gleichungen erhalten wir für die Entropieproduktion durch Streuung

$$\sigma_{St} = \frac{1}{2} k_B \frac{1}{4\pi} \int \int \int \zeta k^2 \ln \frac{\frac{y}{f} + 1}{\frac{y}{f'} + 1} (f' - f) \left[1 + \frac{3}{4} n_{\langle i} n_j \rangle n'_{\langle i} n'_{j} \rangle\right] d\Omega' d\Omega dk \geq 0. \quad (3.26)$$

Wegen $1 + \frac{3}{4} n_{\langle i} n_j \rangle n'_{\langle i} n'_{j} \rangle = \frac{3}{4} (1 + (n_i n'_i)^2) > 0$ sind alle Terme im Integranden positiv und somit auch die Entropieproduktion σ_{St} .

Die Positivität der Entropieproduktion ist damit garantiert. Wir werden in Kap. 14 zeigen, daß die Entropieproduktion ein Lorentz-Skalar ist, also für jeden Beobachter denselben Wert hat. Damit ist das H-Theorem, das wir hier im Ruhesystem bewiesen haben, in jedem Beobachtersystem gesichert.

Teil II

Die Momentenmethode mit Entropiemaximierung

Kapitel 4

Momente und Momentengleichungen

4.1 Momente der Verteilungsfunktion

Das wichtigste Ziel der Strahlungsthermodynamik ist die Berechnung von Energie- und Impulsdichte, e und p_i , der Strahlung und des Einflusses der Strahlung auf die Materie, der sich in den Produktionen P_e und P_{p_i} niederschlägt. Diese Größen sind bekannt, wenn die Photon-Verteilungsfunktion zu allen Zeiten in allen Orten bekannt ist, also die Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) gelöst ist.

Nun ist eine Funktion vollständig bekannt, wenn alle ihre Momente bekannt sind. Daher ist es eine Alternative zur Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung, die Momente der Verteilungsfunktion zu allen Zeiten in allen Orten zu berechnen.

Diese Methode ist dann von Vorteil, wenn es ausreicht, zur Beschreibung eines gegebenen Prozesses die raum-zeitliche Entwicklung nur weniger Momente zu verfolgen. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, Kriterien dafür zu finden, wieviele Momente notwendig sind.

Die Momente werden zunächst definiert als symmetrische Tensoren n -ter Stufe,

$$u_{i_1 i_2 \dots i_n}^r(x_i, t) = \int k^r n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_n} f(x_i, t, k_i) d\mathbf{k}, \quad (4.1)$$

der Exponent r ist eine natürliche Zahl. Wegen $f = f(x_i, t, k_i)$ sind die Momente Funktionen von Ort und Zeit. Im folgenden werden wir diese Abhängigkeit nicht explizit kenntlich machen.

Spurbildung im Moment (4.1) liefert ein Moment niedrigerer Tensorstufe,

$$u_{i_1 i_2 \dots i_n}^r \delta_{i_{n-1} i_n} = u_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}}^r, \quad (4.2)$$

die Momente nach (4.1) sind nicht unabhängig.

Um einen Satz unabhängiger Momente zu erhalten, betrachten wir nur die vollständig spurfreien Anteile der Momente, also

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \int k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} f d\mathbf{k}. \quad (4.3)$$

Wenn wir f durch die Momente darstellen, dann berücksichtigt der Faktor k^r im Integranden die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von der Wellenzahl und der Faktor $n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$ berücksichtigt die Anisotropie. Die $n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$ sind eine Darstellung der Kugelflächenfunktionen, siehe dazu Anhang C.

Energie- und Impulsdichte sowie der Drucktensor fügen sich in dieses Schema ein wie folgt

$$\begin{aligned} e &= \hbar c u^1 \\ p_i &= \frac{1}{c^2} Q_i = \hbar u_i^1 \\ N_{\langle ij \rangle} &= \hbar c u_{\langle ij \rangle}^1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ein weiteres Moment mit anschaulicher Bedeutung ist die Photonenzahldichte u^0 .

4.2 Momentengleichungen im Ruhesystem

Die Gleichungen für die raum-zeitliche Entwicklung der Momente $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ erhalten wir durch Multiplikation der Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) mit $k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$ und anschließender Integration über $d\mathbf{k}$. Unter Berücksichtigung von (C.21) folgt

$$\frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + \frac{n}{2n+1} c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^r}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^r}{\partial x_k} = P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r. \quad (4.5)$$

Die Größe

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \int k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} \mathcal{S} d\mathbf{k} \quad (4.6)$$

heißt Produktion des Momentes $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$.

Da wir die Strahlungs-Transport-Gleichung bisher nur im Ruhesystem der Materie formuliert haben, handelt es sich bei (4.5) um die Momentengleichungen im Ruhesystem. Die Gleichungen für beliebige Beobachter werden wir erst später formulieren (Teil IV).

Insbesondere lauten Energie- und Impulsbilanz

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c^2 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} = \hbar c P^1 = P_e, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial e}{\partial x_i} + \frac{\partial N_{\langle ik \rangle}}{\partial x_k} = \hbar P_i^1 = P_{p_i}; \quad (4.8)$$

die rechten Seiten liefern die Kopplung an Energie- und Impulsbilanz der Materie.

Mit (4.5) haben wir ein System von unendlich vielen gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die Momente erhalten. Um dieses System überhaupt behandeln zu können, muß man sich auf eine endliche Zahl von Momenten beschränken.

Bevor wir mit der Diskussion fortfahren, wollen wir bemerken, daß Anisotropie und k -Abhängigkeit auch getrennt betrachtet werden können [49]. Dazu werden k -abhängige Momente $m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}$ definiert, indem nur über die Raumrichtungen integriert wird,

$$m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} = \int n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} f d\Omega. \quad (4.9)$$

Mit (1.11, 4.3) gilt

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \int k^r m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} k^2 dk. \quad (4.10)$$

Für die Momente $m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}$ lauten die Momentengleichungen

$$\frac{\partial m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}}{\partial t} + \frac{n}{2n+1} c \frac{\partial m_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial m_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}}{\partial x_k} = \mathcal{P}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}; \quad (4.11)$$

mit den Produktionen

$$\mathcal{P}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} = \int n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \mathcal{S} d\Omega. \quad (4.12)$$

Diese Momente sind noch von der Wellenzahl abhängig, d.h. die Gleichungen (4.11) müssen für jeden Wert der Wellenzahl gelöst werden - der Aufwand ist enorm. Wir werden diese Gleichungen im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht weiter betrachten.

4.3 Das Abschlußproblem

Da wir uns auf eine endliche Zahl von Momenten beschränken müssen, stellt sich die Frage, wieviele und welche Gleichungen benötigt werden, um einen gegebenen Prozeß zufriedenstellend zu beschreiben.

Wir nehmen ganz allgemein an, daß die Kenntnis der Momente

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r, \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (4.13)$$

mit natürlichen Zahlen $R, N \geq 1$ den Prozeß hinreichend genau beschreibt. Diese Momente bezeichnen wir als die Variablen der Strahlungsthermodynamik. Wir werden später nach Kriterien suchen, die es erlauben, für einen gegebenen Prozeß die Zahl der Variablen, also R und N , möglichst klein zu halten.

Selbstverständlich ist es einleuchtend, die Werte des Exponenten r in (4.13) mit der Null beginnen zu lassen. Wir werden jedoch bei der Berechnung der Produktionen durch Bremsstrahlungsabsorption feststellen, daß wir in Systemen, in denen dieser Prozeß eine Rolle spielt, erst

mit $r = 1$ beginnen dürfen. Zudem beschränkt sich die mir bekannte Literatur überhaupt nur auf die Wahl $r = 1$ (also auch $R = 1$), so daß durch die Variablenwahl (4.13) auch der Fall $r = 1$ in der Theorie enthalten ist.

In den Gleichungen (4.5) für die Momente (4.13) finden wir noch die Momente

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N+1} \rangle}^r, \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R, \quad (4.14)$$

sowie die Produktionen

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r, \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (4.15)$$

Es ist die Aufgabe der thermodynamischen Materialtheorie, Zustandsgleichungen für diese Größen zu finden, also Gleichungen, die sie mit den Momenten (4.13) verknüpfen.

Kapitel 5

Das Entropiemaximumprinzip

In Problemen der kinetischen Gastheorie hat sich zur Bestimmung der Zustandsgleichungen die Methode der Entropiemaximierung als überaus erfolgreich erwiesen (siehe z.B. [13], [14], [51]). Das Entropiemaximumprinzip ist äquivalent zum Formalismus der Erweiterten Thermodynamik nach Müller&Ruggeri [37], siehe Anhang D, impliziert also alle ihre Eigenschaften, insbesondere die Endlichkeit aller Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Signalen.

Das Entropiemaximumprinzip liefert eine Verteilungsfunktion, aus der im Prinzip alle Zustandsgleichungen berechnet werden können. Das Vorgehen wird skizziert, jedoch ist dieser Weg nur in wenigen Sonderfällen gangbar, da analytisch nicht zu lösende Integrale auftreten. In diesem Kapitel werden wir daher auf ein Näherungsverfahren zurückgreifen. Mit dem Sonderfall der nichtlinearen 4-Feld-Theorie, in der alle Materialgleichungen ohne Näherungen bestimmt werden können, werden wir uns später beschäftigen.

5.1 Voraussetzungen

Wir fassen die Variablen mittels eines Multiindex A zusammen und schreiben ihren Zusammenhang mit der Verteilungsfunktion als

$$u_A = \int \psi_A f d\mathbf{k} \quad (5.1)$$

mit der erzeugenden Größe

$$\psi_A = \{ \dots, k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}, \dots \}. \quad (5.2)$$

Auch die gesuchten Zustandsgleichungen (4.14, 4.15) sind durch die Verteilungsfunktion gegeben,

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N+1} \rangle}^r = \int k^r n_{\langle i_1 \dots i_{N+1} \rangle} f d\mathbf{k}, \quad (5.3)$$

$$P_A = \int \psi_A \mathcal{S} d\mathbf{k}. \quad (5.4)$$

Damit wir Zustandsgleichungen erhalten, die diese Größen auf die Variablen u_A zurückführen, benötigen wir die Kenntnis der Verteilungsfunktion in der speziellen Form

$$f = f(u_A(x_i, t), k_i), \quad (5.5)$$

d.h. die Verteilungsfunktion soll nur über die Felder u_A von Ort und Zeit abhängen. Diese Form der Verteilungsfunktion werden wir aus dem Entropiemaximumprinzip ableiten [13]. Man beachte, daß in der Verteilungsfunktion (5.5) nur die Variablen selbst als Argumente gewählt werden, ihre Gradienten und Zeitableitungen jedoch nicht. Damit treten in den Zustandsgleichungen keine Gradienten oder Zeitableitungen auf. Dies entspricht den Materialansätzen in der Erweiterten Thermodynamik.

5.2 Das Prinzip

Das Entropiemaximumprinzip besagt, daß die Verteilungsfunktion $f(u_A(x_i, t), k_i)$ bestimmt wird, indem die Entropiedichte (1.18) bezüglich f maximiert wird, und zwar unter Vorgabe der Werte der Variablen u_A . Von diesen Nebenbedingungen machen wir uns mittels Lagrange-Multiplikatoren Λ_A frei und maximieren den Ausdruck

$$-k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k} - \Lambda_A \left(\int \psi_A f d\mathbf{k} - u_A \right) \quad (5.6)$$

bezüglich f ohne Nebenbedingungen. Die gesuchte Verteilungsfunktion ergibt sich zu

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi = \frac{1}{k_B} \Lambda_A \psi_A. \quad (5.7)$$

Das weitere Vorgehen ist wie folgt: Zunächst werden die Integrale (5.1-5.4) mit dieser Verteilungsfunktion berechnet. Die aus (5.1) resultierenden Gleichungen $u_A(\Lambda_B)$ werden invertiert, so daß mit $\Lambda_A(u_B)$ die Lagrange-Multiplikatoren in den übrigen Gleichungen ersetzt werden können.

Bedauerlicherweise ist dieses Vorgehen nur in wenigen Fällen exakt durchführbar, da es in der Regel nicht gelingt, die auftretenden Integrale analytisch zu berechnen. Daher muß man, wie wir es weiter unten tun werden, zu Näherungsverfahren greifen.

5.3 Invertierbarkeit

Es ist keinesfalls sofort einsichtig, daß die Gleichungen $u_A(\Lambda_B)$ invertierbar sind. Zum Beweis müssen wir zeigen, daß $\partial u_A/\partial \Lambda_B$ eindeutig definit ist. Es gilt

$$\frac{\partial u_B}{\partial \Lambda_A} = \int \psi_B \frac{\partial f}{\partial \Lambda_A} d\mathbf{k} = \int \psi_B \frac{df}{d\Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \Lambda_A} d\mathbf{k} = \int \psi_B \frac{df}{d\Xi} \frac{1}{k_B} \psi_A d\mathbf{k}. \quad (5.8)$$

Da $df/d\Xi$ nach (5.7) stets negativ ist, ist dieser Ausdruck negativ definit, der Beweis ist erbracht.

Da zudem gilt

$$\frac{\partial h}{\partial u_A} = k_B \int \ln \left(1 + \frac{y}{f} \right) \frac{\partial f}{\partial u_A} d\mathbf{k} = \Lambda_C \frac{\partial}{\partial u_A} \int \psi_C f d\mathbf{k} = \Lambda_C \frac{\partial u_C}{\partial u_A} = \Lambda_A \quad (5.9)$$

können wir noch folgern, daß

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_A \partial u_B} - \text{negativ definit} \quad (5.10)$$

ist. Diese Aussage steht in Übereinstimmung mit dem Postulat (D.10) der Erweiterten Thermodynamik. Die Existenz der Entropiebilanz (D.8) folgt in der kinetischen Theorie direkt aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) und der Definition der Entropie. Da Entropie, Entropiefluß und Entropieproduktion nach (A.5, A.8, A.9) durch die Verteilungsfunktion gegeben sind, ergeben sich mit der maximierten Verteilungsfunktion für diese Größen automatisch Materialgleichungen der Form (D.9). Da wir auch die Existenz des H-Theorems schon bewiesen haben, schließen wir auf die Äquivalenz zwischen dem Entropieprinzip der Erweiterten Thermodynamik und dem Entropiemaximumprinzip.

Es ist leicht zu zeigen, daß alle aus dem Entropieprinzip geschlossenen Zusammenhänge auch aus dem Entropiemaximumprinzip folgen. Zusätzlich liefert die kinetische Theorie eine Berechnungsvorschrift für die Produktionen. Hier geht sie deutlich über die phänomenologische Theorie hinaus.

5.4 Näherung der Nichtgleichgewichtsverteilung

5.4.1 Die Verteilungsfunktion

Setzen wir in der Verteilungsfunktion (5.7) die Größen ψ_A nach (5.2) explizit ein, so folgt

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi = \frac{1}{k_B} \sum_{r,n} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r k^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}. \quad (5.11)$$

Wie schon gesagt, können wir die Integrale über diese Funktion nicht ausführen, und müssen eine geeignete Näherung für sie finden.

Wir betrachten zunächst Strahlung im Gleichgewicht mit Materie der Temperatur T . Die Gleichgewichtsverteilung kennen wir bereits,

$$f = \frac{y}{\exp \Xi_{|E} - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi_{|E}(k, T) = \frac{\hbar c k}{k_B T}. \quad (5.12)$$

Wir schließen, daß für die Lagrange-Multiplikatoren im Gleichgewicht gilt¹

$$\Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | E}^r = \begin{cases} \frac{\hbar c}{T}, & r = 1, n = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.13)$$

Wir bestimmen nun die Verteilungsfunktion für nicht zu große Abweichungen vom Gleichgewicht. Dazu schreiben wir

$$\frac{1}{k_B} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \frac{\hbar c}{k_B T} \delta^{r1} \delta_{n0} + \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \quad (5.14)$$

und nehmen an, daß die λ_A kleine Größen sind. Der Faktor $\left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r$ ermöglicht es uns, die Größe Ξ in der Form

$$\Xi = \Xi_{|E} + \sum_{r,n} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \Xi_{|E}^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}. \quad (5.15)$$

zu schreiben (beachte, daß die k -Abhängigkeit sich nun in $\Xi_{|E}$ wiederfindet, die $\lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ sind dimensionslos). Die Abweichungen sollen so klein sein, daß näherungsweise gilt

$$f \approx f_{|E}(k, T) + \frac{df}{d\Xi_{|E} = \Xi_{|E}} (\Xi - \Xi_{|E}). \quad (5.16)$$

Indem wir hier etwas expliziter werden, erhalten wir die gesuchte Verteilungsfunktion

$$f \approx f_{|E}(k, T) + \sum_{r,n} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \frac{df_{|E}(k, T)}{d\Xi_{|E}} \Xi_{|E}^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}. \quad (5.17)$$

Die so dargestellte Verteilungsfunktion ist also eine Reihenentwicklung in den ψ_A . Bei zu starker Abweichung vom Gleichgewicht ist diese Verteilungsfunktion nicht geeignet. Das ist insbesondere beim Eindringen eines Sonnenstrahls in eine Atmosphäre der Fall. Mit diesem Problem werden wir uns später, in Teil III dieser Arbeit, befassen.

5.4.2 Momente und Lagrange-Multiplikatoren

Die Lagrange-Multiplikatoren werden berechnet aus

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \int k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} f d\mathbf{k}, \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R; \quad n = 0, \dots, N. \quad (5.18)$$

Unter Verwendung von (C.20) und den Momenten der Gleichgewichtsverteilung $f_{|E}(k, T)$,

$$u_{|E}^r(T) = 4\pi y \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r+3} \Gamma(r+3) \zeta(r+3), \quad (5.19)$$

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | E}^r(T) = 0, \quad (5.20)$$

¹Üblicherweise ist in der Literatur der Lagrange-Multiplikator der Energie im Gleichgewicht durch $1/T$ gegeben. Der Faktor $\hbar c$ resultiert daher, daß erst $\hbar c u^1$ die Energiedichte ergibt.

erhalten wir den linearen Zusammenhang

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | E}^r(T) - \frac{n!}{\prod_{j=0}^n (2j+1)} 4\pi y \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r+3} \sum_{s=0}^R C(r, s) \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s, \quad (5.21)$$

wobei wir die Koeffizienten $C(r, s)$ definiert haben gemäß

$$C(r, s) = \Gamma(s+r+3) \zeta(s+r+2). \quad (5.22)$$

$\Gamma(x)$ ist die Gamma-Funktion und $\zeta(x)$ bezeichnet die Riemannsche Zeta-Funktion. Es ist zu beachten, daß (5.21) für *beliebige* Werte von r und n gilt.

Die Lagrange-Multiplikatoren werden aus den Gleichungen (5.21) für $r = 0/1, \dots, R$; $n = 0, 1, \dots, N$ bestimmt. Wir definieren mit Hilfe der Koeffizienten $C(r, s)$ eine Matrix \mathcal{C}_{rs} ,

$$\mathcal{C}_{rs} = C(r, s), \quad r, s = 0 \text{ oder } 1, \dots, R \quad (5.23)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren ergeben sich aus (5.21) durch Multiplikation mit \mathcal{C}_{tr}^{-1}

$$\lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t = - \frac{\prod_{j=0}^n (2j+1)}{n!} \sum_{r=0/1}^R \mathcal{C}_{tr}^{-1} \frac{u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r - u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | E}^r(T)}{4\pi y \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r+3}}. \quad (5.24)$$

Damit sind die Lagrange-Multiplikatoren - und also die Verteilungsfunktion - bekannt.

5.5 Entropie, Entropiefluß und Entropieproduktion

Wir wollen noch Entropie, Entropiefluß und Entropieproduktion berechnen. Wir leiten Zusammenhänge ab, in denen sowohl die Lagrange-Multiplikatoren wie auch die Felder stehen, d.h. die Funktionen $\Lambda_A(u_B)$ sind noch nicht eingesetzt. Das ermöglicht die Angabe sehr kompakter Formeln.

Am raschesten gelingt dies bei der Entropieproduktion (A.9),

$$\sigma = k_B \int \left[\ln \left(\frac{y}{f} + 1 \right) \right] \mathcal{S} d\mathbf{k}. \quad (5.25)$$

Mit der Verteilungsfunktion (5.11) folgt

$$\sigma = k_B \int \Xi S d\mathbf{k} = \Lambda_A \int \psi_A S d\mathbf{k} = \Lambda_A P_A. \quad (5.26)$$

Entropie und Entropiefluß machen etwas mehr Mühe. Wir erinnern an ihre Definitionen (1.18, A.8)

$$h = -k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y+f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k}, \quad (5.27)$$

$$\phi_k = -k_{BC} \int n_k \left[f \ln \frac{f}{y} - (y+f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k}. \quad (5.28)$$

Das weitere Vorgehen illustrieren wir anhand der Entropie. Wir setzen $d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = 1/3 \frac{dk^3}{dk} dk d\Omega$ und führen eine partielle Integration bezüglich k durch. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Verteilungsfunktion für $k \rightarrow \infty$ verschwinden muß, erhalten wir mit (5.11)₁

$$h = -\frac{k_B}{3} \int \frac{df}{dk} \Xi k^3 dk d\Omega \quad (5.29)$$

Nochmalige partielle Integration liefert mit (5.11)₂

$$h = \frac{1}{3} \Lambda_A \int \frac{1}{k^2} \frac{d\psi_A k^3}{dk} f d\mathbf{k}. \quad (5.30)$$

Die entsprechende Gleichung für den Entropiefluß lautet

$$\phi_k = \frac{c}{3} \Lambda_A \int n_k \frac{1}{k^2} \frac{d\psi_A k^3}{dk} f d\mathbf{k}. \quad (5.31)$$

Wir erinnern die Definition von ψ_A (5.2) und machen den Multiindex A explizit. Mit den Definitionen der Felder, Flüsse und Produktionen erhalten wir für Entropie, Entropiefluß und Entropieproduktion

$$h = \sum_{r,n} \frac{r+3}{3} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \quad (5.32)$$

$$\phi_k = \sum_{r,n} c \frac{r+3}{3} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle k}^r \quad (5.33)$$

$$\sigma = \sum_{r,n} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \quad (5.34)$$

In diesen Gleichungen müssen wir die oben berechneten Lagrange-Multiplikatoren einsetzen. Es ist sinnvoll, dazu die Abweichungen vom Gleichgewicht einzuführen (5.14)

$$h = \frac{4 \hbar c}{3 T} u^1 + k_B \sum_{r,n} \frac{r+3}{3} \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \quad (5.35)$$

$$\phi_k = \frac{4 \hbar c^2}{3 T} u_k^1 + k_B \sum_{r,n} c \frac{r+3}{3} \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle k}^r \quad (5.36)$$

$$\sigma = \frac{\hbar c}{T} P^1 + k_B \sum_{r,n} \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r. \quad (5.37)$$

Hier sind nun die $\lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ nach (5.24) einzusetzen. Die auftretenden unhandlichen Formeln notieren wir an dieser Stelle nicht. Allerdings sei noch bemerkt, daß für den Entropiefluß in Gleichgewichtsnähe (nur Glieder erster Ordnung in den abweichungen vom Gleichgewicht) gilt $\phi_k = Q_k/T$. Dieser Zusammenhang, der in manchen thermodynamischen Theorien vorausgesetzt wird (Clausius-Duhem-Ungleichung [12]), ist hier nicht mehr gültig.

5.6 Entwicklung der Verteilungsfunktion um eine andere Temperatur

Die Entwicklung der Verteilungsfunktion um die Gleichgewichtsverteilung liefert nicht immer eine gute Approximation. Insbesondere ist dies der Fall beim Eindringen eines Sonnenstrahles in eine Atmosphäre (Teil III). Hier besteht die Möglichkeit, die Verteilungsfunktion um eine andere Temperatur θ zu entwickeln. Dazu schreiben wir anstelle von (5.14)

$$\frac{1}{k_B} \Lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \frac{\hbar c}{k_B \theta} \delta^{r1} \delta_{n0} + \left(\frac{\hbar c}{k_B \theta} \right)^r \hat{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r, \quad (5.38)$$

so daß die Verteilungsfunktion nun lautet ($\Xi_\theta = \hbar c k / k_B \theta$)

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi = \Xi_\theta + \sum_{r,n} \hat{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \Xi_\theta^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}. \quad (5.39)$$

Die $\hat{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ sollen so klein sein, daß näherungsweise gilt

$$f \approx f_\theta(k, \theta) + \frac{df_\theta(k, \theta)}{d\Xi_\theta} \sum_{r,n} \hat{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \Xi_\theta^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \quad (5.40)$$

mit

$$f_\theta(k, \theta) = \frac{y}{\exp \Xi_\theta - 1}. \quad (5.41)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = - \frac{\prod_{j=0}^n (2j+1)}{n!} \sum_t C_{rt}^{-1} \frac{u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t - u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t|_\theta}{4\pi y \left(\frac{k_B \theta}{\hbar c} \right)^{t+3}} \quad (5.42)$$

mit

$$u_{|\theta}^r = 4\pi y \left(\frac{k_B \theta}{\hbar c} \right)^{r+3} \Gamma(r+3) \zeta(r+3), \quad (5.43)$$

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r|_\theta = 0. \quad (5.44)$$

Im weiteren Umgang mit dieser Verteilungsfunktion haben wir zwei Möglichkeiten: Es wäre möglich, θ als Variable zu betrachten, wobei dann θ anfangs so gewählt wird, daß die Anfangs- und/oder Randbedingungen durch die obige Verteilungsfunktion gut approximiert werden. Bei der Annäherung ans Gleichgewicht muß dann θ gegen die Materietemperatur T gehen. In diesem Fall muß eine Gleichung, die das raumzeitliche Verhalten von θ beschreibt, zur Verfügung gestellt werden. Diese Gleichung kann nur eine Kombination der Momentengleichungen sein, die eine der Momentengleichungen ersetzt. Dieses Vorgehen ist jedoch nur möglich, wenn ein sinnvoller Zusammenhang zwischen den Momenten und θ gefunden wird. Ein solcher Zusammenhang wurde von uns bisher nicht gefunden, daher wird diese Möglichkeit nicht weiter verfolgt.

Die andere Möglichkeit besteht darin, θ als eine Konstante zu wählen, die eine gute Approximation der Randbedingungen erlaubt. In diesem Fall ergibt sich ein Problem mit der Gleichgewichtsverteilung: Setzen wir in (5.40, 5.42) die Gleichgewichtswerte der Momente ein, so muß sich, wenigstens näherungsweise, die Gleichgewichtsverteilung ergeben. Wir erhalten

$$f_{|E}(k, T) \approx f_{\theta}(k, \theta) - \frac{df_{\theta}(k, \theta)}{d\Xi_{\theta}} \sum_r \tilde{\lambda}_{|E}^r(T, \theta) \Xi_{\theta}^r \quad (5.45)$$

mit

$$\tilde{\lambda}_{|E}^r(T, \theta) = \sum_t \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{u_{|E}^t(T) - u_{|\theta}^t(\theta)}{4\pi y \left(\frac{k_B \theta}{hc}\right)^{t+3}} \quad (5.46)$$

Es müssen also sowohl die aktuelle Verteilungsfunktion wie auch die Gleichgewichtsverteilungsfunktion in eine Reihe entwickelt werden. Indem wir f_{θ} zwischen (5.40) und (5.45) eliminieren, erhalten wir als Darstellung der Verteilungsfunktion

$$f \approx f_{|E}(k, T) + \frac{df_{\theta}(k, \theta)}{d\Xi_{\theta}} \sum_{r,n} \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \Xi_{\theta}^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$$

mit

$$\tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = - \frac{\prod_{j=0}^n (2j+1)}{n!} \sum_t \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t - u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | E}^t(T)}{4\pi y \left(\frac{k_B \theta}{hc}\right)^{t+3}}. \quad (5.47)$$

Die Verteilungsfunktion (5.47) werden wir in Teil III dieser Arbeit verwenden.

Kapitel 6

Feldgleichungssysteme

6.1 Zustandsgleichungen für Momente

Mit der Kenntnis der Lagrange-Multiplikatoren (5.24) und der Verteilungsfunktion (5.17) können wir die Zustandsgleichungen für die Momente berechnen, die keine Variablen sind. Aus (5.24) und (5.21) erhalten wir

$$u^r = u_{|E}^r(T) + \sum_{s,t}^R C(r,s) C_{st}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-t} (u^t - u_{|E}^t(T)) \quad (6.1)$$

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \sum_{s,t}^R C(r,s) C_{st}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-t} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t \quad (6.2)$$

Für $r = 0$ oder $1, \dots, R$ sind diese Gleichungen Identitäten. Für andere Werte von r haben wir Gleichungen gefunden, die die Momente $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ als Funktionen der Momente $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t$, $t = 0$ oder $1, \dots, R$ darstellen.

Für Momente mit einem höheren Tensorgrad als N gilt

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N+m} \rangle}^r = 0, \quad m > 0. \quad (6.3)$$

Damit haben wir insbesondere die gesuchten Zustandsgleichungen (4.14) gefunden; sie sind denkbar einfach, denn es gilt

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N+1} \rangle}^r = 0, \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R \quad (6.4)$$

6.2 Berechnung der Produktionen

Die Produktionen (4.15) setzen sich aus den Beiträgen der verschiedenen Prozessen zusammen. Wir schreiben

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \sum_{\alpha} P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | \alpha}^r \quad (6.5)$$

und berechnen die $P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | \alpha}^r$ für die verschiedenen Prozesse.

6.2.1 Graue Materie

Für graue Materie (1.43) erhalten wir, ohne auf die maximierte Verteilungsfunktion zurückgreifen zu müssen, sofort

$$P_{|GM}^r = -\kappa_{GM} (u^r - u_{|E}^r(T)), \quad (6.6)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | GM}^r = -\kappa_{GM} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r. \quad (6.7)$$

Um eine einheitliche Schreibweise mit den anderen Wechselwirkungsmechanismen zu erlangen, schreiben wir

$$P_{|GM}^r = -\sum_s \Theta_{rs}^{GM} (u^s - u_{|E}^s(T)), \quad (6.8)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | GM}^r = -\sum_s \Theta_{rs}^{GM} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s, \quad (6.9)$$

mit

$$\Theta_{rs}^{GM} = \kappa_{GM} \delta_{rs}. \quad (6.10)$$

Weil die explizite Verteilungsfunktion im Nichtgleichgewicht für graue Materie nicht benötigt wird, wird diese oft für qualitative Aussagen herangezogen.

6.2.2 Absorption nach einem Potenzgesetz

Für ein Absorptionsgesetz der Form (1.44) erhalten wir

$$P_{|PG}^r = -\sum_s \Theta_{rs}^{PG}(\nu, T) (u^s - u_{|E}^s(T)), \quad (6.11)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | PG}^r = -\sum_s \Theta_{rs}^{PG}(\nu, T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s. \quad (6.12)$$

Dabei haben wir eine Matrix der Absorptionskoeffizienten definiert gemäß

$$\Theta_{rs}^{PG}(\nu, T) = \kappa_{PG}^0 \sum_t C(r + \nu, t) \mathcal{C}_{ts}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r+\nu-s}. \quad (6.13)$$

Für die Potenzgesetze ist zu beachten, daß im Fall $r = 0, \dots, R$ nur Exponenten $\nu \geq 0$, im Fall $r = 1, \dots, R$ nur Exponenten $\nu \geq -2$ in Frage kommen, da sonst die Koeffizienten $C(r + \nu, t) = \Gamma(r + t + \nu + 3) \zeta(r + t + \nu + 2)$ unbestimmt werden. Falls andere Exponenten auftreten, muß die Zahl der Variablen mit ähnlichen Argumenten, wie wir sie später in der Behandlung der Bremsstrahlungsabsorption verwenden werden, eingeschränkt werden. Wir gehen in dieser Arbeit nicht weiter darauf ein.

6.2.3 Photoionisierung

Mit dem Absorptionskoeffizienten der Gebunden-Frei-Übergänge (1.46) erhalten wir

$$P_{|bf}^r = - \sum_s \Theta_{rs}^{bf}(T) (u^s - u_{|E}^s(T)), \quad (6.14)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |bf}^r = - \sum_s \Theta_{rs}^{bf}(T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s. \quad (6.15)$$

Die Matrix der Absorptionskoeffizienten für diese Prozesse ist gegeben durch

$$\Theta_{rs}^{bf}(T) = D_{bf} \sum_t \mathcal{C}_{ts}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-s-3} \int_{\Xi_n}^{\infty} \frac{\Xi^{t+r-1}}{e^{\Xi} - 1} d\Xi, \quad (6.16)$$

mit $\Xi_n = \hbar c k_n / k_B T$ (vergl. 1.46). Das Integral in (6.16) ist nicht elementar lösbar und muß numerisch bestimmt werden.

6.2.4 Bremsstrahlung

Die Produktionen aufgrund von Bremsstrahlungsabsorption ergeben sich mit (1.48) zu

$$P_{|ff}^r = - \sum_s \Theta_{rs}^{bf}(T) (u^s - u_{|E}^s(T)), \quad (6.17)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |ff}^r = - \sum_s \Theta_{rs}^{bf}(T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s. \quad (6.18)$$

Die Matrix der Absorptionskoeffizienten für diese Prozesse ist gegeben durch

$$\Theta_{rs}^{ff}(T) = D_{ff} \sum_t \Gamma(t+r) \zeta(t+r) \mathcal{C}_{ts}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-s-3}. \quad (6.19)$$

Für $r = t = 0$ wird dieser Ausdruck unbestimmt ($\zeta(0) = \infty$). Dieses Problem tritt nicht auf, wenn die Momente mit $r = 0$ von der Liste der Variablen gestrichen werden. Wir werden jetzt begründen, warum dies zu geschehen hat.

Die Nettozahldichte von Photonen mit Wellenvektor k_i , die durch Bremsstrahlungsabsorption und -emission erzeugt wird, ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_{ff} d\mathbf{k} = -\kappa_{ff} (f - f_{|E}) d\mathbf{k}. \quad (6.20)$$

Mit dem Absorptionskoeffizienten (1.48) und der maximierten Verteilungsfunktion (5.17) erhalten wir dafür

$$\mathcal{S}_{ff} d\mathbf{k} = D_{ff} \sum_{r,n} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \left(\frac{\hbar c}{k_B T} \right)^r f_{|E} k^{r-1} n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} dk d\Omega. \quad (6.21)$$

Dieser Ausdruck muß für alle Wellenzahlen k endlich bleiben - insbesondere für $k \rightarrow 0$. Das ist jedoch nur gewährleistet, wenn für alle n gilt

$$\lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0 = 0. \quad (6.22)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, mit dieser Forderung umzugehen. Erstens kann man (6.22) als Nebenbedingung an die Felder $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ ansehen; z.B. kann (5.24) mit (6.22) nach $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0$ umgestellt werden, gibt also eine Zustandsgleichung für die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0$. Die andere Möglichkeit besteht darin, die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0$ von der Liste der Variablen zu streichen. In diesem Fall folgen die Zustandsgleichungen für die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0$ aus (6.1, 6.2). Durch eine einfache numerische Rechnung überzeugt man sich davon, daß beide Methoden zu denselben Zustandsgleichungen führen - sinnvollerweise wählt man diejenige, die den geringeren Aufwand verlangt: Die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^0$ werden von der Liste der Variablen gestrichen.

6.2.5 Streuung

Für Streuprozesse erhalten wir mit (1.56)

$$P_{|St}^r = 0, \quad (6.23)$$

$$P_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle | St}^r = - \sum_s \Theta_{rs}^{St}(T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^s. \quad (6.24)$$

Dabei ist die Matrix der mittleren Streukoeffizienten für Rayleigh-Streuung (1.58) gegeben durch

$$\Theta_{rs}^R = \zeta_R^0 \left(1 - \frac{1}{10} \delta_{n2} \right) \sum_t C(r+4, t) C_{ts}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r+4-s}, \quad (6.25)$$

für Thomson-Streuung (1.59) erhalten wir

$$\Theta_{rs}^T = \zeta_T \left(1 - \frac{1}{10} \delta_{n2} \right) \delta_{rs}. \quad (6.26)$$

Als Folge der anisotropen Streuung haben die Matrizen für die Produktionen $P_{\langle i_1 i_2 \rangle | St}^r$ einen geringfügig anderen Wert, für isotrope Streuung entfällt der Term $-\frac{1}{10}\delta_{n2}$.

6.2.6 Die Matrizen der Absorptions- und Streukoeffizienten

Zur Vereinfachung der Schreibweise fassen wir die Matrizen der vorhergehenden Abschnitte abkürzend zusammen,

$$\Theta_{rq} = \sum_{E/A} \Theta_{rq}^\alpha, \quad (6.27)$$

$$\widehat{\Theta}_{rq} = \Theta_{rq} + \sum_{St} \Theta_{rq}^\alpha; \quad (6.28)$$

E/A kennzeichnet eine Summation über alle Emissions- und Absorptionsprozesse, St entsprechend eine Summation über alle Streuprozesse.

Für andere als die hier betrachteten Wechselwirkungsmechanismen können die Matrizen Θ_{rq}^α aus der folgenden Formel berechnet werden.

$$\Theta_{rq}^\alpha = \sum_t C_{tq}^{-1} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-q} \int \kappa_\alpha \left(\Xi \frac{k_B T}{\hbar c} \right) \frac{e^\Xi}{(e^\Xi - 1)^2} \Xi^{t+r+2} d\Xi; \quad (6.29)$$

für Streuprozesse ist κ_α durch ζ_α zu ersetzen.

6.3 Feldgleichungen

Mit den eben eingeführten Abkürzungen erhalten wir die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^r}{\partial t} + c \frac{\partial u_k^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \Theta_{rq}(T) \left(u^q - u_{|E}^q(T) \right) \\ \frac{\partial u_i^r}{\partial t} + \frac{1}{3} c \frac{\partial u^r}{\partial x_i} + c \frac{\partial u_{\langle ik \rangle}^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T) u_i^q \\ \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \rangle}^r}{\partial t} + \frac{2}{5} c \frac{\partial u_{\langle i_1}^r}{\partial x_{i_2}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 k \rangle}^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \left(\frac{9}{10} \widehat{\Theta}_{rq}(T) + \frac{1}{10} \Theta_{rq}(T) \right) u_{\langle i_1 i_2 \rangle}^q \\ \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + \frac{n}{2n+1} c \frac{\partial u_{\langle\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle\rangle}^r}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q \\ \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^r}{\partial t} + \frac{N}{2N+1} c \frac{\partial u_{\langle\langle i_1 i_2 \dots i_{N-1} \rangle\rangle}^r}{\partial x_{i_N}} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^q \end{aligned} \quad (6.30)$$

Hier haben wir den aus der anisotropen Streuung rührenden Unterschied in der Produktion von $u_{\langle i_1 i_2 \rangle}^r$ explizit gemacht. Bei der Beschränkung auf isotrope Streuung (1.57) lautet die entsprechende Gleichung

$$\frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \rangle}^r}{\partial t} + \frac{2}{5}c \frac{\partial u_{\langle i_1 \rangle}^r}{\partial x_{i_2}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 k \rangle}^r}{\partial x_k} = - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T) u_{\langle i_1 i_2 \rangle}^q. \quad (6.31)$$

Wie man sieht, sind die Gleichungen für verschiedene Superskripte r über die rechten Seiten gekoppelt. Diese Kopplung ist das wichtigste Ergebnis der Momentenmethode mit Entropiemaximierung. In der dem Autor bekannten Literatur werden nur die Feldgleichungen für die Variablen $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^1$ betrachtet, s. z.B. [45][49].

In Anhang E wird, am Beispiel eines Potenzgesetzes, ein interessanter und wichtiger Zusammenhang nachgewiesen: Die maximierte Verteilungsfunktion (5.17) ist - im Rahmen der verwendeten linearen Näherung - gerade dann eine Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung, wenn die mit ihr berechneten Feldgleichungen gelten und die Zahl der Variablen nach unendlich geht ($R, N \rightarrow \infty$).

Damit stellt sich die Entropiemaximierung als ein ausgesprochen schlagkräftiges Werkzeug heraus. Die aus ihr bestimmten Feldgleichungen liefern ein der Strahlungs-Transport-Gleichung äquivalentes Problem.

Da eine unendliche Variablenzahl nicht handhabbar ist, werden wir in den folgenden Kapiteln nach rationalen Argumenten zur Einschränkung der Zahlen R und N suchen. Dabei wird sich herausstellen, daß dies eine Frage der Anisotropie der betrachteten Prozesse und der Frequenzabhängigkeit der Absorptions- und Streukoeffizienten ist. Jedoch ist an dieser Stelle schon klar, daß unsere Feldgleichungen (6.30) einen weitaus größeren Bereich der Anisotropie und Frequenzverteilung abdecken können, als die im zweiten Kapitel mittels der klassischen Methode abgeleiteten Gleichungen.

Lediglich für graue Materie und für Thomson-Streuung sind die Matrizen Θ_{rq} bzw. $\widehat{\Theta}_{rq}$ nur auf der Diagonale besetzt. Dann sind die Gleichungen für verschiedene Superskripte r nicht gekoppelt und es genügt zur Berechnung des Energietransportes durch Strahlung, das System für die Variablen $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^1$.

Das übliche Vorgehen zu Auswahl von Momentengleichungen in der kinetischen Gastheorie besteht darin, zunächst die Momentengleichungen für die physikalisch interessanten Größen - in unserem Fall also die Energiedichte - aufzuschreiben. Für die in diesen Gleichungen auftretenden Flüsse (die Größen unter der Divergenz) werden dann wieder Momentengleichungen erzeugt, dann wieder für deren Flüsse usw. Dieses Verfahren führt zu einer Kopplung vorrangig über die *linken* Seiten, in unserem Fall also nur zu den Momentengleichungen für die Variablen $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^1$.

Das von uns vorgestellte Verfahren, das eine Kopplung der Gleichungen für die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ mit verschiedenem Superskript r nur über die *rechten* Seiten liefert, geht darüber hinaus. Die Grundlage dieses Verfahrens bildet

die getrennte Betrachtung von Anisotropie (beschrieben durch die Zahl N) und Frequenzverteilung (beschrieben durch die Zahl R). Diese Ideen könnten auch in der kinetischen Theorie atomarer Gase Eingang finden, etwa in der Theorie der Lichtstreuung [51]. In diesem Zusammenhang sind auch einige Arbeiten von Kremer, z.B. [43], interessant, in denen auf ähnliche Weise Viskositäten und Wärmeleitkoeffizienten berechnet werden.

Die auf dem Phononenmodell aufbauende Theorie des Energietransportes in Kristallen ist aufgrund der Ähnlichkeit der physikalischen Modelle fast analog zur Theorie des Energietransportes durch Strahlung zu behandeln. Der wesentliche Unterschied liegt in den möglichen Wechselwirkungen. Hier hat sich das System mit $r = 1$ als überaus erfolgreich erwiesen (siehe dazu [14] und die darin zitierte Literatur). Dazu ist allerdings zu sagen, daß es sich bei der gefundenen Übereinstimmung zwischen den Aussagen der Theorie und den experimentellen Befunden in [14] vor allem um eine qualitative, weniger um eine exakt quantitative Übereinstimmung handelt.

Kapitel 7

Lokales Strahlungsgleichgewicht

7.1 Voraussetzungen

Bevor wir zu einer genaueren Betrachtung der Feldgleichungen im Nichtgleichgewicht kommen, wollen wir den Grenzfall des lokalen Strahlungsgleichgewichts betrachten. Lokales Gleichgewicht liegt dann vor, wenn die Verteilungsfunktion am Ort x_i zur Zeit t gleich der Planck-Verteilung zur lokalen Materietemperatur $T(x_i, t)$ ist.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Umständen dies der Fall ist. Zur Beantwortung erinnern wir daran, daß ein Ort im Sinne der Kontinuumsphysik durch ein Volumenelement gegeben ist, dessen Kantenlängen in der Größenordnung der freien Weglänge der Materie (wir denken an ein Gas) liegt. Einem solchen Volumenelement kann eine lokale Temperatur zugeschrieben werden. Lokales Gleichgewicht zwischen Materie und Strahlung kann nur dann eintreten, wenn die in einem Volumenelement emittierte Strahlung nicht viele Volumenelemente durchdringen kann, d.h. bereits innerhalb dieses Volumenelements größtenteils absorbiert wird.

Es folgt als Bedingung des lokalen Strahlungsgleichgewichts, daß die freie Weglänge der Strahlung (c/κ) nicht viel größer als die freie Weglänge der Materie sein darf. Ist die freie Weglänge der Strahlung jedoch deutlich größer, liegt lokales Nichtgleichgewicht vor, das einfachste Beispiel bildet die Wechselwirkung von Sonnenstrahlung und Erdatmosphäre.

Die entscheidende Einflußgröße ist hier die Dichte der Materie, die als Faktor in den Absorptionskoeffizienten κ enthalten ist. Erst bei sehr großer Materiedichte ϱ kann sich das lokale Gleichgewicht einstellen.

7.2 Maxwell-Iteration

Um die Gleichungen im Grenzfall des lokalen Gleichgewichts zu erhalten, wenden wir auf die Gleichungen (6.30) ein iteratives Verfahren an (Maxwell-Iteration, s. [38]).

Wir setzen voraus, daß die Matrizen $\Theta_{rq}(T)$ und $\widehat{\Theta}_{rq}(T)$ sehr große Werte haben. Dies ist dann der Fall, wenn die freien Flugzeiten $1/\kappa$ viel kleiner sind als die Zeiten in denen sich die Momente ändern.

Der nullte Iterationsschritt resultiert aus der Annahme, daß die Matrizen in der Tat als unendlich groß angesehen werden können. Damit auf den linken Seiten keine unendlichen Gradienten stehen, müssen die Faktoren an den Matrizen verschwinden, und wir erhalten die nullten Iterierten als

$$u_{|(0)}^q = u_{|E}^q(T), \quad (7.1)$$

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |(0)}^q = 0; \quad (7.2)$$

das sind gerade die Gleichgewichtswerte.

Die ersten Iterierten $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |(1)}^r$ erhalten wir, indem wir in die linken Seiten von (6.30) die nullten Iterierten einsetzen, $u^r = u_{|(0)}^r$, $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |(0)}^r$ und in den rechten Seiten $u^r = u_{|(1)}^r$, $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q = u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle |(1)}^q$ setzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{|E}^r(T)}{\partial t} &= -\sum_q \Theta_{rq}(T) \left(u_{|(1)}^q - u_{|E}^q(T) \right), \\ \frac{1}{3} c \frac{\partial u_{|E}^r(T)}{\partial x_i} &= -\sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T) u_{i|(1)}^q, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q = 0, \quad n \geq 2.$$

Weitere Iterationsschritte sind möglich, wir sind hier daran jedoch nicht interessiert.

Wir betrachten nun nur noch die mittlere Gleichung, mit dem Ziel, den Impuls u_i^1 in dieser Iteration zu bestimmen. Unter Berücksichtigung der Gleichung (5.19) für $u_{|E}^r(T)$ können wir schreiben

$$u_{i|(1)}^1 = -\frac{c}{3} \sum_r \widehat{\Theta}_{1r}^{-1} \frac{\Gamma(r+4) \zeta(r+3)}{\Gamma(5) \zeta(4)} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-1} \frac{\partial u_{|E}^1(T)}{\partial x_i}. \quad (7.4)$$

Nun gilt $p_i = \hbar u_i^1$ sowie $e = \hbar c u^1$ und wir erhalten eine (2.11) entsprechende Gleichung,

$$p_i = -\frac{1}{3} \frac{1}{\tilde{\kappa}} \frac{\partial e_{|E}(T)}{\partial x_i}. \quad (7.5)$$

Den mittleren Absorptionskoeffizienten $\tilde{\kappa}$ haben wir dabei definiert als

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \sum_r \hat{\Theta}_{1r}^{-1} \frac{\Gamma(r+4) \zeta(r+3)}{\Gamma(5) \zeta(4)} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^{r-1}. \quad (7.6)$$

Dieser Absorptionskoeffizient ist zu vergleichen mit dem Rosseland-Mittel $\check{\kappa}$ (2.12).

Zum Vergleich beschränken wir uns auf reine Bremsstrahlungsabsorption unter Vernachlässigung von Streuung. Wir erhalten

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{D_{ff}} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \sum_{q,r} \frac{\Gamma(q+4) \zeta(q+3)}{\Gamma(5) \zeta(4)} A_{qr}^{-1} \Gamma(r+4) \zeta(r+3) \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}} = \frac{1}{D_{ff}} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \int \frac{x^7 dx}{\Gamma(5) \zeta(4) (1 - e^{-x})^2 (e^x - 1)} \quad (7.8)$$

wobei wir eine Matrix

$$A_{rs} = \Gamma(r+s) \zeta(r+s) \quad (7.9)$$

definiert haben.

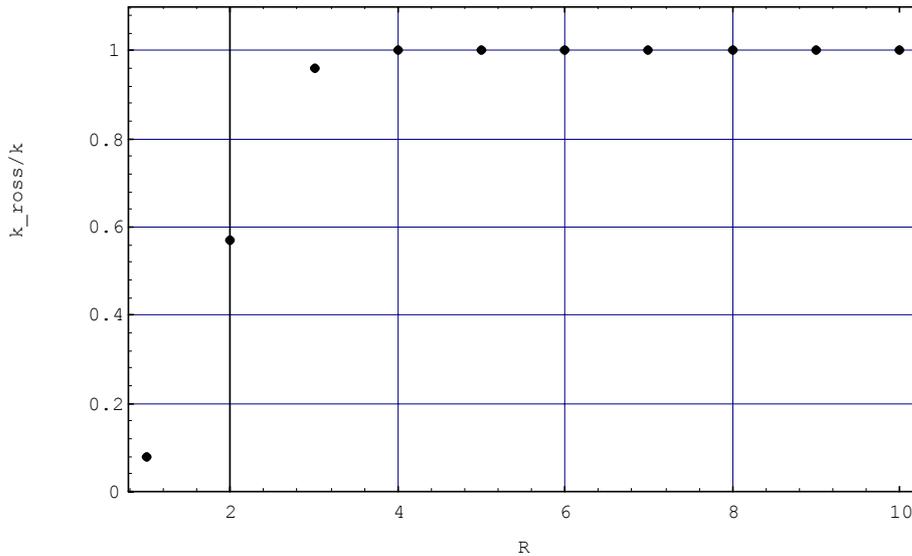


Abbildung 7.1: $\frac{\check{\kappa}}{\tilde{\kappa}}$ über der Momentenzahl R

Abb. 7.1 zeigt das Verhältnis $\check{\kappa}/\tilde{\kappa}$ für verschiedene Werte der Momentenzahl R . Für $R \geq 4$ stimmen die beiden Koeffizienten überein, $\tilde{\kappa}$ konvergiert rasch auf den Grenzwert $\check{\kappa}$.

Wir schließen, daß die von uns entwickelte Momententheorie im Grenzfall des lokalen Gleichgewichts das Rosseland-Mittel enthält.

7.3 Bewertung

Zur Bewertung der Ergebnisse des letzten Abschnittes sei zunächst darauf hingewiesen, daß es die im Zentrum dieser Arbeit stehende Momententheorie gestattet, Prozesse, die deutlich vom lokalen Gleichgewicht abweichen, zu berechnen. In späteren Kapiteln werden wir an einigen Beispielen die ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen Lösungen der Strahlungs-Transport-Gleichung und der Momentengleichungen sehen.

Die Entropiemaximumsmethode liefert ein formal sehr einfaches und elegantes Vorgehen zur Bestimmung der Materialkoeffizienten. Beim Übergang zum lokalen Gleichgewicht kann auf einfache Weise ein mittlerer Absorptionskoeffizient berechnet werden (7.6). Dabei stellt sich heraus, daß dieser Koeffizient von der Zahl R der der Theorie zugrunde gelegten Variablen abhängt. Mit steigendem R konvergiert der Koeffizient auf einen konstanten Wert (Abb. 7.1), der mit dem bekannten Rosseland-Mittel übereinstimmt.

Das gaskinetische Äquivalent zur hier präsentierten Momentenmethode ist die Grad-Methode [32]. Diese liefert, insbesondere für Maxwell-Moleküle, dieselben Transportkoeffizienten wie die Chapman-Enskog-Methode, ohne daß auf höhere Momente zurückgegriffen werden muß (für die Strahlungsthermodynamik würde das heißen $r = R = 1$). Für den mit der kinetischen Gastheorie vertrauten Leser ist daher die Abhängigkeit von der Zahl R gewiß überraschend.

Die Diskrepanz läßt sich mit Hilfe des BGK-Modells für den Stoßterm der Boltzmann-Gleichung verstehen. In diesem Modell ist der Stoßterm von der Form $-\nu(f - f_{LM})$; f_{LM} ist eine lokale Maxwell-Verteilung und ν ist die Stoßfrequenz der Teilchen. Diese Näherung entspricht dem Produktionsterm der Strahlungs-Transport-Gleichung. Für Maxwell-Moleküle ist die Stoßfrequenz konstant, für andere Wechselwirkungspotentiale hängt ν von der Teilchengeschwindigkeit C ab [24]. Leider gibt kein mir bekannter Autor die Geschwindigkeitsabhängigkeit von ν an, es ist jedoch zu vermuten, daß gilt $\nu = \nu_0 + g(C)$, $\nu_0 = const.$ Falls die Funktion $g(C)$ nur eine kleine Korrektur liefert, ist eine Übereinstimmung beider Methoden zu erwarten¹.

Die Absorptionskoeffizienten der Strahlungsthermodynamik hingegen hängen sehr stark von der Frequenz ab (für die kinetische Gastheorie würde das bedeuten $\nu_0 = 0$), aus dem Fehlen des konstanten führenden Terms folgt die starke Diskrepanz zwischen der Momentenmethode und der Chapman-Enskog-Methode

Im lokalen Gleichgewicht liefert die Wahl $r = R = 1$ für die Variablen der Strahlungsthermodynamik nur für graue Materie, also frequenzunabhängigen Absorptionskoeffizienten, dasselbe Ergebnis wie die Chapman-Enskog-Methode. In allen anderen Fällen muß der Variablensatz der Momentenmethode erweitert werden.

¹Zu dieser Fragestellung ist am Institut für Thermodynamik und Reaktionstechnik eine Diplomarbeit geplant.

Hier bietet sich bereits ein Kriterium zur Bestimmung der Momentenzahl R an: Man wähle R so groß, daß der mittlere Absorptionskoeffizient im lokalen thermischen Gleichgewicht seinem Grenzwert sehr nahe ist (im obigen Beispiel für Bremsstrahlungsabsorption also $R = 4$).

Es sei darauf hingewiesen, daß Verallgemeinerungen der Chapman-Enskog-Methode für das Nichtgleichgewicht vorliegen, siehe z.B. die Arbeit von SCHWEIZER [45]. Der Vorteil der Momentenmethode mit Entropiemaximierung liegt in ihrem sehr klaren und eleganten Formalismus.

In den folgenden Kapiteln wird anhand einfacher Beispiele die hervorragende Übereinstimmung von Lösungen der Momentengleichungen mit Lösungen der Strahlungs-Transport-Gleichung gezeigt. Ein Vergleich mit den Gleichungen von SCHWEIZER kann nicht vorgenommen werden, da dieser die Absorptionkoeffizienten in seinen Gleichungen nicht explizit angibt.

Kapitel 8

Eingeschränkte Anisotropie

Wir kommen nun zu den Untersuchungen über die notwendige Variablenzahl. In diesem Kapitel gehen wir davon aus, daß die Zahl R bekannt ist und suchen ein Kriterium zur Einschränkung der Zahl N .

Wir erinnern daran, daß der höchste Tensorgrad der Momente mit der Anisotropie des zu beschreibenden Prozesses zusammenhängt. Man wird davon ausgehen, daß ein endlicher Tensorgrad N genügt, um den Prozeß in hinreichender Genauigkeit zu beschreiben. Je geringer die Anisotropie ist, umso kleiner erwarten wir die Zahl N .

Für einen gegebenen Prozeß kann N bestimmt werden wie folgt: Man entscheidet sich für einen ersten Wert N_1 , den man möglichst klein wählt und berechnet den Prozeß aus den gegebenen Anfangs- und Randbedingungen. Sodann wählt man einen neuen Wert $N_2 = N_1 + 1$ und berechnet den Prozeß von neuem. Liefern beide Berechnungen annähernd dasselbe Resultat, genügt die Wahl von $N = N_1$. Andernfalls wird die Momentenzahl solange weiter erhöht, bis die Berechnungen mit $N_{k+1} = N_k + 1$ dasselbe Ergebnis liefert, wie die Berechnung mit N_k ; dann muß $N = N_k$ gesetzt werden.

Aufgrund der Struktur der Feldgleichungen ist es allerdings auch möglich, ein analytisches Kriterium zu finden. Die folgende Betrachtung ist aus einer Arbeit des Autors über Phononen hervorgegangen [48], aufgrund der unterschiedlichen Wechselwirkungen muß hier jedoch die Argumentation erweitert werden.

Bedauerlicherweise ist diese Argumentation nur für linearisierte Gleichungen möglich, d.h. - insbesondere, daß die Materietemperatur T als konstant in Ort und Zeit angenommen werden muß, $T = T_0$. Damit ist der Fall des lokalen Gleichgewichts in dieser Untersuchung nicht enthalten, dieser liefert lediglich die trivialen Lösungen $u^q = u_{|E}^q(T_0)$, $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q = 0$. Es werden

also nur echte Nichtgleichgewichtsprozesse zwischen Strahlung und Materie betrachtet.

8.1 Eindimensionale Feldgleichungen

Wir werden unsere Diskussion auf eindimensionale Probleme beschränken. Zudem betrachten wir nur den Fall isotroper Streuung mit den Feldgleichungen (6.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^r}{\partial t} + c \frac{\partial u_k^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \Theta_{rq}(T_0) \left(u^q - u_{|E}^q(T_0) \right) \\ \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + \frac{n}{2n+1} c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^r}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^r}{\partial x_k} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T_0) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q \quad (8.1) \\ \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^r}{\partial t} + \frac{N}{2N+1} c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N-1} \rangle}^r}{\partial x_{i_N}} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq}(T_0) u_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^q \end{aligned}$$

Wenn alle Variablen nur Funktionen von t und $x = x_1$ sind, genügt die Betrachtung der Variablen

$$u_{\langle n \rangle}^r = u_{\underbrace{\langle 11 \dots 1 \rangle}_{n\text{-mal}}}^r \quad (8.2)$$

und die Feldgleichungen reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\langle 0 \rangle}^r}{\partial t} + c \frac{\partial u_{\langle 1 \rangle}^r}{\partial x} &= - \sum_q \Theta_{rq} \left(u_{\langle 0 \rangle}^q - u_{\langle 0 \rangle|E}^q \right) \\ \frac{\partial u_{\langle n \rangle}^r}{\partial t} + \alpha_n c \frac{\partial u_{\langle n-1 \rangle}^r}{\partial x} + c \frac{\partial u_{\langle n+1 \rangle}^r}{\partial x} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq} u_{\langle n \rangle}^q \quad (8.3) \\ \frac{\partial u_{\langle N \rangle}^r}{\partial t} + \alpha_N c \frac{\partial u_{\langle N-1 \rangle}^r}{\partial x} &= - \sum_q \widehat{\Theta}_{rq} u_{\langle N \rangle}^q \end{aligned}$$

mit

$$\alpha_n = \frac{n^2}{4n^2 - 1}. \quad (8.4)$$

Die Feldgleichungen sind über die rechten Seiten gekoppelt. Sie sind teilweise entkoppelbar, da die Temperatur der Materie als konstant angenommen wird. Wir definieren neue Größen $w_{\langle n \rangle}^r$

$$u_{\langle 0 \rangle}^r - u_{\langle 0 \rangle|E}^r = \sum_p M_{rp} w_{\langle 0 \rangle}^p \quad (8.5)$$

$$u_{\langle n \rangle}^r = \sum_p M_{rp} w_{\langle n \rangle}^p \quad (8.6)$$

und erhalten für (8.3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial t} + c \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \sum_{r,q,p} M_{sr}^{-1} \Theta_{rq} M_{qp} w_{\langle 0 \rangle}^p \\
\frac{\partial w_{\langle n \rangle}^s}{\partial t} + \alpha_n c \frac{\partial w_{\langle n-1 \rangle}^s}{\partial x} + c \frac{\partial w_{\langle n+1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \sum_{r,q,p} M_{sr}^{-1} \widehat{\Theta}_{rq} M_{qp} w_{\langle n \rangle}^p \\
\frac{\partial w_{\langle N \rangle}^s}{\partial t} + \alpha_N c \frac{\partial w_{\langle N-1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \sum_{r,q,p} M_{sr}^{-1} \widehat{\Theta}_{rq} M_{qp} w_{\langle N \rangle}^p
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Zur Entkoppelung wird die Matrix M_{rp} als Matrix der Eigenvektoren von Θ_{rq} bestimmt,

$$\sum_{r,q} M_{sr}^{-1} \Theta_{rq} M_{qp} = \frac{1}{\mu_s} \delta_{sp}, \tag{8.8}$$

$1/\mu_s$ sind die Eigenwerte dieser Matrix, μ_s sind die Relaxationszeiten der Größen $w_{\langle n \rangle}^p$.

Nach (6.28) gilt für die Matrix $\widehat{\Theta}_{rq}$

$$\widehat{\Theta}_{rq} = \Theta_{rq} + \sum_{St} \Theta_{rq}^\alpha, \tag{8.9}$$

und also

$$\sum_{r,q} M_{sr}^{-1} \widehat{\Theta}_{rq} M_{qp} = \frac{1}{\mu_s} \delta_{sp} + \sum_{St} \sum_{r,q} M_{sr}^{-1} \Theta_{rq}^\alpha M_{qp} \tag{8.10}$$

Die Matrizen Θ_{rq}^{St} werden im allgemeinen andere Eigenvektoren haben als Θ_{rq} . Um eine vollständige Entkopplung zu erreichen, beschränken wir uns auf isotrope Thomson-Streuung, dann gilt $\Theta_{rq}^{St} = \sum_{St} \Theta_{rq}^\alpha = \zeta_T \delta_{rq}$ (6.26) und wir erhalten

$$\sum_{r,q} M_{sr}^{-1} \widehat{\Theta}_{rq} M_{qp} = \left(\frac{1}{\mu_s} + \zeta_T \right) \delta_{sp} = \frac{1}{\hat{\mu}_s} \delta_{sp}. \tag{8.11}$$

Als Ergebnis dieser Überlegungen erhalten wir $R + 1$ entkoppelte Gleichungssysteme für die Variablen $w_{\langle n \rangle}^s$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial t} + c \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \frac{1}{\mu_s} w_{\langle 0 \rangle}^s \\
\frac{\partial w_{\langle n \rangle}^s}{\partial t} + \alpha_n c \frac{\partial w_{\langle n-1 \rangle}^s}{\partial x} + c \frac{\partial w_{\langle n+1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle n \rangle}^s \\
\frac{\partial w_{\langle N \rangle}^s}{\partial t} + \alpha_N c \frac{\partial w_{\langle N-1 \rangle}^s}{\partial x} &= - \frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle N \rangle}^s
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Es genügt für das folgende, nur eines dieser Systeme zu betrachten.

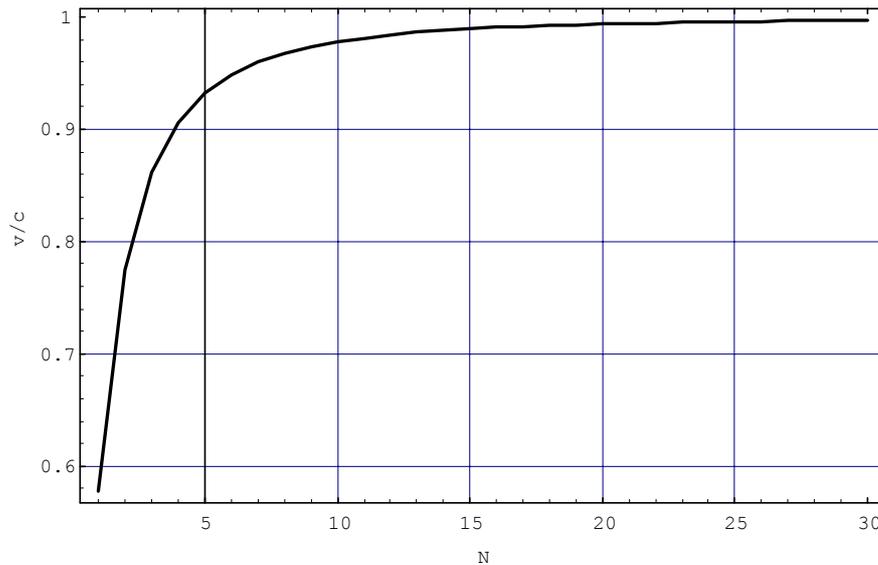


Abbildung 8.1: *Maximale Frontgeschwindigkeit über N*

Signalgeschwindigkeiten auf. Man beachte in diesem Zusammenhang, daß das in Abschnitt 2.1 vorgestellte Verfahren zu einer parabolischen Gleichung für die Energiedichte führt und also zu einer unendlichen Signalgeschwindigkeit im Limes $\Omega \rightarrow \infty$. Dieses Verhalten ist unphysikalisch.

Da der Freistrahл sich gerade mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen muß, können nur die Moden mit der maximalen Phasengeschwindigkeit angeregt sein¹, die Amplituden der anderen Moden müssen verschwinden. Aufgrund der Linearität der Gleichungen können diese Moden nicht angeregt werden, wenn ein Freistrahл in eine Atmosphäre eindringt. In diesem Fall genügt die Betrachtung nur einer Lösung der Dispersionsrelation.

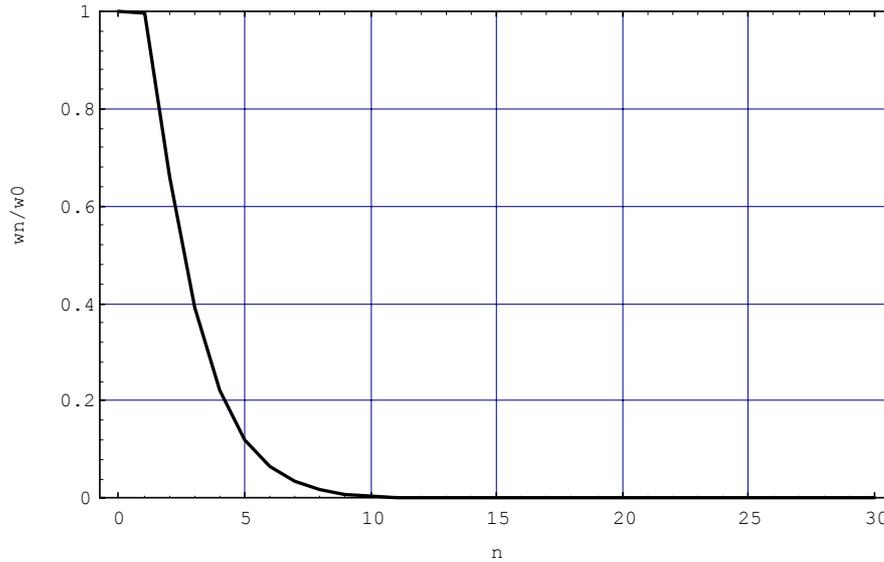
Dieses Ergebnis erweitern wir dahingehend, daß wir nur die Lösungen der Dispersionsrelation als physikalisch ansehen, die im Limes $\Omega \rightarrow \infty$ die (betragsmäßig) maximale Phasengeschwindigkeit liefern. Im folgenden betrachten wir nur noch diese Mode.

Es ist interessant, die Amplituden der Felder im Freistrahл zu betrachten. Abb. 8.2 zeigt die Amplituden bezogen auf die Amplitude $\tilde{w}_{(0)}$. In einem Freistrahл gilt $u_{(1)}^r = u_{(0)}^r$. Während also für einen echten Freistrahл gelten müßte $\tilde{w}_{(1)}/\tilde{w}_{(0)} = 1$, liefert die Auswertung numerischer Ergebnisse für die vorliegende Näherung $\tilde{w}_{(1)}/\tilde{w}_{(0)} = (v_{Ph}/c)_{\max} \simeq 1$. Die Felder des Freistrahles werden berechnet gemäß

$$u_{(n)}^r = (-1)^n D_n(\beta = (v_{Ph}/c)_{\max}, \gamma = 1) u_{(0)}^r. \quad (8.22)$$

Die Vorgabe der Randbedingungen muß also in Übereinstimmung mit der verwendeten Theorie vorgenommen werden (*ballistische Randbedingungen*, vergl. [14]).

¹Es gibt immer zwei Lösungen, die sich gerade im Vorzeichen unterscheiden.

Abbildung 8.2: Amplituden der Felder für $N = 30$

Für größere Werte von N ändert sich die Kurve in Abb. 8.2 nur in sehr geringem Maße. Die Amplituden der höheren Momente gehen gegen Null, sind also vernachlässigbar.

8.3 Reduktion von N

8.3.1 Fall I: Keine Streuung

Falls nur Absorptions- und Emissionsprozesse stattfinden, jedoch keine Streuprozesse, $\hat{\mu} = \mu$, $\gamma = 1$, dann sind die zulässigen Werte von β für alle Frequenzen gleich den Eigenwerten der Matrix \mathbf{A} . Die zulässigen Lösungen der Dispersionsrelation liefern

$$\beta = \pm (v_{Ph}/c)_{\max} \quad (8.23)$$

oder mit (8.16)

$$q = \pm \frac{1}{(v_{Ph})_{\max}} \left(\Omega - \frac{i}{\mu_s} \right). \quad (8.24)$$

Diese Lösung der Dispersionsrelation beschreibt dispersionsfreie Wellen der Phasengeschwindigkeit $v_{Ph} = \pm (v_{Ph})_{\max}$ mit konstanter Dämpfung $1/\mu_s (v_{Ph})_{\max}$. Eine solche Dispersionsrelation finden wir für jeden Wert von $s = 0$ oder $1, \dots, R$. Die Lösungen für die Felder $u_{\langle n \rangle}^r$ sind Überlagerungen von $R + 1$ oder R Wellen gleicher Phasengeschwindigkeit, aber verschiedener Dämpfung.

Hier finden wir nochmals das Kriterium für lokales Gleichgewicht: liegen die "freien Weglängen" $\mu_s (v_{Ph})_{\max}$ der Strahlung für alle s in der Größenordnung der freien Weglänge des Gases, dann

wird das Signal bereits innerhalb eines Ortes der Kontinuumstheorie weggedämpft und es liegt Gleichgewicht vor.

8.3.2 Fall II: Keine Absorption

Wesentlich interessanter ist der absorptionsfreie Fall, $1/\mu_s = 0$, also $1/\hat{\mu}_s = \zeta_T$, $\gamma = i\hat{\mu}_s\Omega/(1 + i\hat{\mu}_s\Omega)$. Eine numerische Untersuchung zeigt, daß die relevanten Lösungen der Dispersionsrelation in eine Reihe entwickelt werden können,

$$\frac{1}{\beta^2} = a_1 (\hat{\mu}_s\Omega) + a_2 (\hat{\mu}_s\Omega)^2 + a_3 (\hat{\mu}_s\Omega)^3 + \dots; \quad (8.25)$$

insbesondere wird $1/\beta^2 = 0$ für $\hat{\mu}_s\Omega \rightarrow 0$.

Für die Amplituden finden wir die Beziehungen²

$$\tilde{w}_{\langle n \rangle} = \frac{\alpha_n}{\beta} f_n \tilde{w}_{\langle n-1 \rangle}, \quad n = 1, \dots, N \quad (8.26)$$

mit den Faktoren

$$f_n = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta^2} f_{n+1}}, \quad f_N = 1. \quad (8.27)$$

Diese Faktoren werden nun bezüglich $(\hat{\mu}_s\Omega)^\nu$ in eine Reihe entwickelt. Dahinter steht die Idee, daß die Randbedingungen des Prozesses so vorgegeben sind, daß für die größte Frequenz, die zur Beschreibung der Randbedingungen noch wesentlich ist, gilt

$$1 + (\hat{\mu}_s\Omega)^\nu \simeq 1. \quad (8.28)$$

Dabei wird für $\hat{\mu}_s$ der maximale Wert $\max(\hat{\mu}_s)$ gewählt. Wir untersuchen nun die Entwicklung für $\nu = 1, 2$, *beliebig*.

i.) $\nu = 1$, $1 + \hat{\mu}_s\Omega \simeq 1$: In diesem Fall erhalten wir für die Faktoren (8.27) $f_n = 1$ ($n = 1, \dots, N$). Damit gilt für die Amplituden

$$\tilde{w}_{\langle n \rangle} = \frac{\alpha_n}{\beta} \tilde{w}_{\langle n-1 \rangle}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (8.29)$$

Indem wir die inverse Fourier-Transformation anwenden, erhalten wir mit der Definition (8.16) von β die partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial w_{\langle n \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_n \frac{\partial w_{\langle n-1 \rangle}^s}{\partial x} = -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle n \rangle}^s. \quad (8.30)$$

²Für die Amplitude $\tilde{w}_{\langle 0 \rangle}$ bleibt noch die Forderung $\tilde{w}_{\langle 0 \rangle} D_{N+1} = 0$, die gerade die Bedingung für nichttriviale Lösungen, $D_{N+1} = 0$, darstellt.

Zur Bestimmung der Felder $w_{\langle 0 \rangle}^s$ genügt also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial t} + c \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_1 \frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial x} &= -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle 1 \rangle}^s. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Wenn dieses System gelöst ist, können die anderen Felder mittels (8.30) sukzessive berechnet werden.

Eine genaue Betrachtung zeigt, daß im Rahmen der Näherung die unterstrichenen Terme wegfallen sollten. In diesem Fall reduziert sich (8.31)₂ auf ein Fouriersches Gesetz, vergleiche Kapitel 2. Wir haben diese Terme aus formalen Gründen beibehalten, da sie die Hyperbolizität des Systems garantieren.

ii.) $\nu = 2$, $1 + (\hat{\mu}_s \Omega)^2 \simeq 1$: In dieser Näherung erhalten wir für die Faktoren $f_N = 1$, $f_n = 1 / (1 - \alpha_{n+1} / \beta^2)$, $n = 1, \dots, N - 1$. Durch inverse Fourier-Transformation von (8.26) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\langle n \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_n \frac{\partial w_{\langle n-1 \rangle}^s}{\partial x} + c \frac{\partial w_{\langle n+1 \rangle}^s}{\partial x} &= -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle n \rangle}^s, \\ \frac{\partial w_{\langle n+1 \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_{n+1} \frac{\partial w_{\langle n \rangle}^s}{\partial x} &= -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle n+1 \rangle}^s, \quad n = 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Hier genügt zur Bestimmung der Felder $w_{\langle 0 \rangle}^s$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial t} + c \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_1 \frac{\partial w_{\langle 0 \rangle}^s}{\partial x} + c \frac{\partial w_{\langle 2 \rangle}^s}{\partial x} &= -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle 1 \rangle}^s, \\ \frac{\partial w_{\langle 2 \rangle}^s}{\partial t} + c\alpha_2 \frac{\partial w_{\langle 1 \rangle}^s}{\partial x} &= -\frac{1}{\hat{\mu}_s} w_{\langle 2 \rangle}^s. \end{aligned} \quad (8.33)$$

iii.) ν beliebig, $1 + (\hat{\mu}_s \Omega)^\nu \simeq 1$: Indem die Faktoren f_n bis zur ν -ten Ordnung in $\hat{\mu}_s \Omega$ entwickelt werden, läßt sich zeigen, daß die Gleichungen (8.12) mit $N = \nu$ ausreichen, um die Strahlung vernünftig zu beschreiben.

8.3.3 Allgemeine Kriterien

Die beiden betrachteten Fälle unterschieden sich gerade im Wert von γ . Zur Abschätzung von N im Fall, daß sowohl Absorptions- als auch Streuprozesse stattfinden erinnern wir (8.11) und

schreiben

$$\gamma = \frac{1}{1 + \zeta_T \mu_s} + i \hat{\mu}_s \Omega \frac{1}{1 + i \hat{\mu}_s \Omega}. \quad (8.34)$$

Falls die Häufigkeit von Absorptionsprozessen die Häufigkeit von Streuprozessen deutlich überwiegt, gilt $\zeta_T \mu_s \ll 1$, $\gamma \simeq 1$. Dies entspricht unserem Fall I, eine Einschränkung der Variablenzahl ist nicht möglich.

Falls jedoch die Zahl der Streuprozesse die Zahl der Absorptionsprozesse deutlich überwiegt, gilt $\zeta_T \mu_s \gg 1$, $\gamma \simeq i \hat{\mu}_s \Omega / (1 + i \hat{\mu}_s \Omega)$ und die Variablenzahl kann entsprechend Fall II eingeschränkt werden.

Bezeichnen wir zwei Werte ζ_T^I, ζ_T^{II} so, daß gilt $\zeta_T^I \mu_s \ll 1, \zeta_T^{II} \mu_s \gg 1$, so können wir fragen, inwieweit bei gegebenem μ_s eine Einschränkung der Variablenzahl für $\zeta_T \in \{\zeta_T^I, \zeta_T^{II}\}$ möglich ist. Zur Beantwortung dieser Frage wurde leider kein analytisches Kriterium gefunden. Jedoch ist klar, daß mit von ζ_T^I an steigendem ζ_T die Variablenzahl von $N \simeq 30$ immer weiter reduziert werden kann, bis sie für $\zeta_T = \zeta_T^{II}$ den von den Randbedingungen abhängigen Wert $N = \nu$ erreicht.

Falls neben der Thomson-Streuung noch andere Streuprozesse eine Rolle spielen, ist das Gleichungssystem (8.1) nicht entkoppelbar. Dennoch ist die obige Diskussion übertragbar: Im Fall die Absorption stark überwiegender Streuung reichen ν Gleichungen aus, wenn $(\hat{\mu}_s \Omega)^\nu$ gegen Eins vernachlässigbar ist, wobei $1/\hat{\mu}_s$ der größte Eigenwert der Matrix $\hat{\Theta}_{rs}$ ist.

Die Übertragung der Ergebnisse auf mehrdimensionale Probleme scheint problematisch. Klar ist allenfalls, daß bei stark symmetrischen Geometrien eine kleinere Variablenzahl ausreichen wird.

Insbesondere schließen wir, daß die Formeln aus Kapitel 2 im Fall des lokalen Nichtgleichgewichts nur in Frage kommen, wenn neben der Absorption auch Streuprozesse stattfinden, und zwar wesentlich häufiger als Absorptionsprozesse. Da dort Streuprozesse nicht in Betracht gezogen wurden, sind diese Formeln nur im lokalen Gleichgewicht anwendbar.

Kapitel 9

Plötzliche Kompression von Strahlung

9.1 Ein exemplarisches Experiment

Wir wollen jetzt die Frage behandeln, wie groß die Zahl R zu wählen ist. Dazu betrachten wir ein einfaches Experiment, dessen Verlauf sowohl mit der Strahlungs-Transport-Gleichung als auch mit den Momentengleichungen berechnet werden kann und vergleichen die Ergebnisse. Dabei kommt es uns nicht darauf an, ob das Experiment tatsächlich technisch durchführbar ist.

Der Versuchsaufbau sei wie folgt: Wir betrachten einen ideal verspiegelten Zylinder, der durch einen ideal verspiegelten Kolben abgeschlossen ist. Die ideale Verspiegelung garantiert, daß die Wände keine Strahlung absorbieren und emittieren können. Im Innern soll sich eine große Zahl von streuenden und eine im Verhältnis dazu geringe Zahl von absorbierenden Teilchen befinden, die wir als einatomiges ideales Gas beschreiben.

Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand mit der Temperatur T_0 wird der Kolben schlagartig in den Zylinder gedrückt, wobei sich das zur Verfügung stehende Volumen von V_0 auf V_1 verkleinert. Dies soll so schnell geschehen, daß während der Bewegung des Kolbens vernachlässigbar wenige Absorptions- und Emissionsprozesse stattfinden, jedoch so langsam, daß die Verteilung stets homogen bleibt.

Das Gas soll sich zu jeder Zeit im Gleichgewicht befinden. Dann können wir die Kompression des Gases durch die Isentropengleichung der Gleichgewichtsthermodynamik beschreiben, d.h. die Temperatur des Gases direkt nach der Kompression beträgt

$$T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{2/3}. \quad (9.1)$$

Nun wird das System in eine Umgebung der Temperatur T_1 gebracht und sich selbst überlassen. Da sich das innere Gleichgewicht des Gases sofort, das Gleichgewicht zwischen Gas und Strahlung jedoch langsam einstellen soll, ist im weiteren Verlauf die Temperatur konstant gleich T_1 . Aufgrund der Absorptions-/Emissionsprozesse wird nach einiger Zeit wieder ein Gleichgewichtszustand vorliegen. Wir wollen den zeitlichen Verlauf der Energiedichte u^1 zwischen Kompression und Gleichgewicht berechnen.

Für diesen Ausgleichsprozess reduziert sich die Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) auf

$$\frac{df}{dt} = -\kappa (f - f_{|E}(T_1)). \quad (9.2)$$

Die Momentengleichungen (6.30) reduzieren sich entsprechend auf

$$\frac{du^r}{dt} = -\sum_q \Theta_{rq}(T_1) (u^q - u_{|E}^q(T_1)), \quad r = 0 \text{ oder } 1, \dots, R. \quad (9.3)$$

9.2 Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung

Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt für die Verteilungsfunktion direkt nach der Kompression

$$f_0 = \frac{V_0}{V_1} f_{|E}(T_0). \quad (9.4)$$

Für den zeitlichen Verlauf der Verteilungsfunktion ergibt sich mit dieser Anfangsbedingung aus (9.2)

$$f(t) = f_{|E}(T_1) + \left(\frac{V_0}{V_1} f_{|E}(T_0) - f_{|E}(T_1) \right) e^{-\kappa t}. \quad (9.5)$$

Als Maß für die zeitliche Annäherung der Momente an das Gleichgewicht definieren wir Größen

$$v^r = \frac{u^r - u_{|E}^r(T_1)}{\frac{V_0}{V_1} u_{|E}^r(T_0) - u_{|E}^r(T_1)}. \quad (9.6)$$

Es gilt direkt nach der Kompression $v^r(t=0) = 1$ und im Gleichgewicht $v_{|E}^r = 0$. Mit (9.5) und $u^r = \int k^r f d\mathbf{k}$ erhalten wir mit den Substitutionen $x = \hbar ck/k_B T_0$, $y = \hbar ck/k_B T_1$

$$v^r(\tilde{t}) = \frac{\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{r+3} \int \frac{x^{r+2}}{e^x - 1} e^{-\tilde{\kappa} \left(\frac{T_0}{T_1} x \right) \tilde{t}} dx - \int \frac{y^{r+2}}{e^y - 1} e^{-\tilde{\kappa}(y) \tilde{t}} dy}{\Gamma(r+3) \zeta(r+3) \left[\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{r+3} - 1 \right]}. \quad (9.7)$$

Hier haben wir ein neues Zeitmaß \tilde{t} eingeführt gemäß

$$\tilde{\kappa}(y) \tilde{t} = \tilde{\kappa}(y) \tilde{\kappa}(T_1) t = \kappa t; \quad (9.8)$$

z.B. für ein Potenzgesetz

$$\tilde{\kappa}_{PG}(y) = y^\nu, \quad \tilde{\kappa}_{PG}(T_1) = \kappa_{PG}^0 \left(\frac{k_B T_1}{\hbar c} \right)^\nu, \quad (9.9)$$

und für Bremsstrahlungsabsorption

$$\tilde{\kappa}_{ff}(y) = \frac{1 - e^{-y}}{y^3}, \quad \tilde{\kappa}_{ff}(T_1) = D_{ff} \left(\frac{k_B T_1}{\hbar c} \right)^{-3}. \quad (9.10)$$

(9.7) muß numerisch ausgewertet werden. Abb. 9.1 zeigt den zeitlichen Verlauf von v^1 bei Bremsstrahlungsabsorption (9.10). Für diese und die folgenden Berechnungen haben wir ein Volumenverhältnis von $V_0/V_1 = 4$ gewählt.

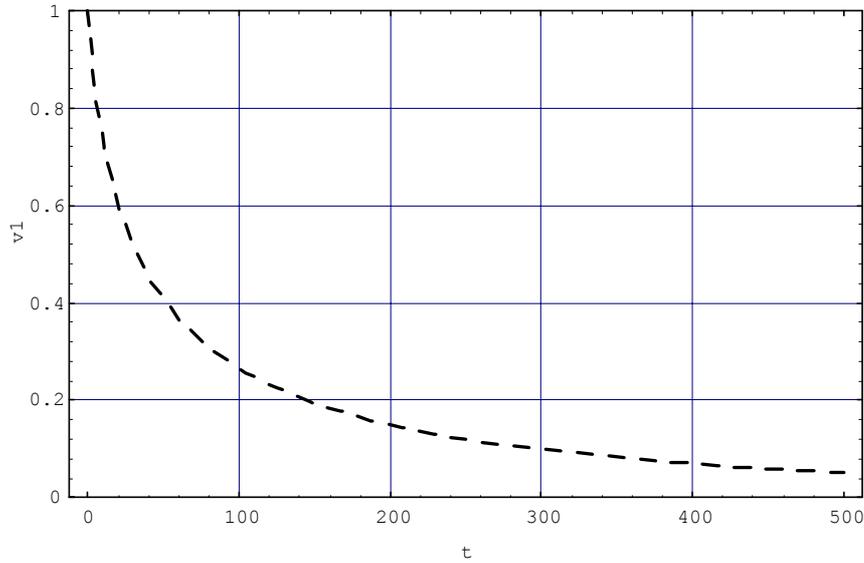


Abbildung 9.1: Relaxation von v^1 bei Bremsstrahlungsabsorption

9.3 Planck und Rosseland-Mittelung

Nach der klassischen Methode aus Kapitel 2 muß unter den angegebenen Bedingungen die Energiedichte der Gleichung

$$\frac{du^1}{dt} = -\hat{\kappa} (u^1 - u_{|E}^1) \quad (9.11)$$

genügen (s.a. [49]), wobei $\hat{\kappa}$ das Planck-Mittel des Absorptionskoeffizienten ist (2.7),

$$\hat{\kappa} = \frac{\int \kappa k f_{|E} d\mathbf{k}}{\int k f_{|E} d\mathbf{k}}. \quad (9.12)$$

Für Bremsstrahlungsabsorption mit $\kappa = D_{ff} \frac{1 - \exp(-\frac{\hbar c k}{k_B T})}{k^3}$ berechnen wir

$$\hat{\kappa}_{ff} = D_{ff} \frac{\left(\frac{k_B T_1}{\hbar c} \right)^{-3}}{\Gamma(4) \zeta(4)} = \frac{\tilde{\kappa}_{ff}(T_1)}{\Gamma(4) \zeta(4)}. \quad (9.13)$$

Damit erhalten wir für den zeitlichen Verlauf von v^1 nach dieser Theorie

$$v^1(\tilde{t}) = \exp -\frac{\tilde{t}}{\Gamma(4)\zeta(4)}. \quad (9.14)$$

In Abb. 9.2 ist der zeitliche Verlauf von v^1 aus der exakten Rechnung und nach (9.14) gegenübergestellt. Es ist deutlich zu sehen, daß die Planck-Mittelung (durchgezogene Kurve) eine

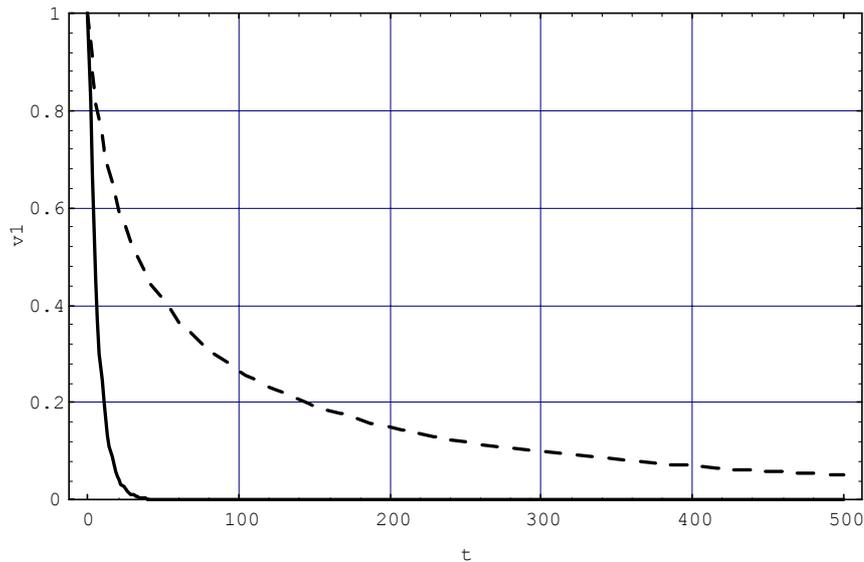


Abbildung 9.2: $v^1(\tilde{t})$ für Bremsstrahlung aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und mit dem Planck-Mittel (durchgezogen)

wesentlich schnellere Annäherung an das Gleichgewicht vorhersagt. Die Unterschiede sind so gravierend, daß die Methode der Planck-Mittelung verworfen werden muß!

Nach einer anderen Theorie [45] sollte die Energiedichte der Gleichung

$$\frac{du^1}{dt} = -\tilde{\kappa}(u^1 - u^1_E) \quad (9.15)$$

genügen, wobei der mittlere Absorptionskoeffizient durch das Rosseland-Mittel $\tilde{\kappa}$ (2.12) gegeben ist. Dieses muß im Falle von Bremstrahlungsabsorption numerisch berechnet werden,

$$\tilde{\kappa}_{ff} = D_{ff} \left(\frac{k_B T_1}{\hbar c} \right)^{-3} \frac{\Gamma(5)\zeta(4)}{5104.74} = \tilde{\kappa}_{ff}(T_1) \frac{\Gamma(5)\zeta(4)}{5104.74}. \quad (9.16)$$

Für den zeitlichen Verlauf von $v^1(\tilde{t})$ ergibt sich

$$v^1(\tilde{t}) = \exp -0.005089 \tilde{t}. \quad (9.17)$$

Abb. 9.3 zeigt, daß der mit dem Rosseland-Mittel berechnete Abfall von v^1 (durchgezogene Kurve) deutlich von der exakten Lösung abweicht - auch diese Methode muß verworfen werden!

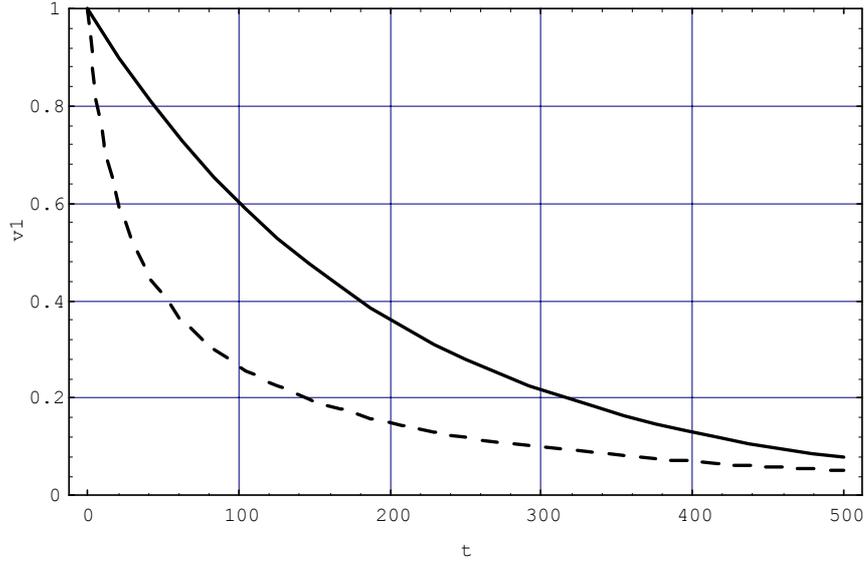


Abbildung 9.3: $v^1(\tilde{t})$ für Bremsstrahlung aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und mit dem Rosseland-Mittel (durchgezogen)

9.4 Lösung der Momentengleichungen

Indem wir die Momentengleichungen (9.3) für die Variablen v^r (9.6) und die Zeit \tilde{t} formulieren, erhalten wir

$$\frac{dv^r}{d\tilde{t}} = -\sum_q \tilde{\Theta}_{rq} v^q \quad (9.18)$$

mit den Matrizen

$$\tilde{\Theta}_{rq}^{PG} = \frac{\Gamma(q+3)\zeta(q+3)}{\Gamma(r+3)\zeta(r+3)} \frac{\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{q+3} - 1}{\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{r+3} - 1} \sum_s C(r+\nu, s) C_{sq}^{-1} \quad (9.19)$$

für ein Potenzgesetz bzw.

$$\tilde{\Theta}_{rq}^{ff} = \frac{\Gamma(q+3)\zeta(q+3)}{\Gamma(r+3)\zeta(r+3)} \frac{\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{q+3} - 1}{\frac{V_0}{V_1} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{r+3} - 1} \sum_s \Gamma(s+r)\zeta(s+r) C_{sq}^{-1} \quad (9.20)$$

für Bremsstrahlungsabsorption.

Die Lösung für die v^r lautet

$$v^r(\tilde{t}) = \sum_{p,s} M_{rp} M_{ps}^{-1} \exp -\alpha_p \tilde{t}, \quad (9.21)$$

wobei α_p die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\Theta}_{rq}$ sind; M_{rp} ist die Matrix der Eigenvektoren. Abb. 9.4 zeigt den zeitlichen Verlauf von v^1 berechnet aus der Momentenmethode mit den Momenten

$u^r, r = 1, \dots, R$ mit $R = 1$ bzw. $R = 6$ im Vergleich zur exakten Lösung, wieder für den Fall von Bremsstrahlungsabsorption. Die Berechnung erfolgte numerisch. Die Kurve für $R = 1$

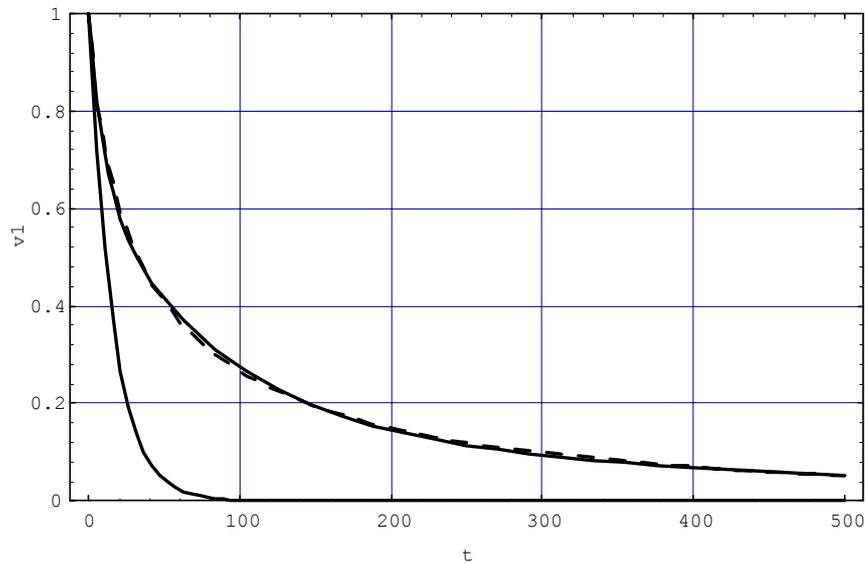


Abbildung 9.4: $v^1(\tilde{t})$ für Bremsstrahlung aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und aus den Momentengleichungen für $R = 1$ und 6 (durchgezogen)

zeigt eine deutliche Abweichung von der exakten Lösung. Vergleich mit Abb. 9.2 zeigt aber, daß der aus der Entropiemaximierung gewonnene mittlere Absorptionskoeffizient für $R = 1$ in seiner Aussage zwischen den Ergebnissen der Planck- und Rosseland-Mittelung liegt. Alle drei sind nicht gut.

Für $R = 6$ jedoch ist der Abbildung eine ausgezeichnete Übereinstimmung der Aussage der Momententheorie mit Entropiemaximierung und der exakten Rechnung zu entnehmen. Damit erweist sich die Berücksichtigung von Momenten mit Werten $r > 1$ als absolut notwendig.

Ohne einen Beleg durch Bilder geben wir noch an, welche Variablen u^r für ein Potenzgesetz mit Exponent ν zu wählen sind:

ν	r
-2	1, ..., 4
-1	1, 2
0	1
1	0, 1, 2
2	0, ..., 5
3	0, ..., 12

Die Zahl der benötigten Variablen hängt also wesentlich von den betrachteten Absorptionsspektren ab. Lediglich für graue Materie ($\nu = 0$) reicht die Wahl $r = 1$ aus, in allen anderen Fällen ist ein erweiterter Variablensatz zu wählen.

Allerdings sind die hier verwendeten Anfangsbedingungen ausgesprochen einfach. Bei einer komplizierteren Anfangsverteilung als (9.4) kann sich das Bild ändern. Dennoch glauben wir, daß der hier betrachtete Prozeß als Entscheidungskriterium für die Zahl der benötigten Momente dienen kann.

Teil III

Absorption und Streuung eines Sonnenstrahles

Kapitel 10

Ein Sonnenstrahl

In diesem Teil der Arbeit wollen wir die Absorption und Streuung eines Sonnenstrahles in einer Atmosphäre mittels Momentengleichungen berechnen. Wie wir noch zeigen werden, führt dieses Problem über die Grenzen der Entropiemaximummethode, wie wir sie bisher verwendet haben, hinaus - wir müssen eine geeignete Modifikation finden. Der erste Schritt, der zum Verständnis des gegebenen Problems getan werden muß, ist die Betrachtung des Sonnenstrahls. Damit beschäftigt sich dieses Kapitel.

10.1 Verteilungsfunktion im Abstand r von der Sonne

Die Sonne sendet in guter Näherung Gleichgewichtsstrahlung der Temperatur $T_{\odot} = 5700K$ aus. Man überlegt sich leicht (Anhang F), daß ein Beobachter außerhalb der Sonne eine Verteilungsfunktion $f_{|E}(T_{\odot})$ feststellt in allen Richtungen, die von der Sonne zum Beobachter zeigen. In allen anderen Richtungen ist die Verteilungsfunktion gleich Null.

Ein Beobachter im Abstand r von der Sonne nimmt diese als runde Scheibe des Radius b wahr (Abb. 10.1). Der Richtungsvektor der Photonen sei $n_i = \{\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta\}_i$. Aus der Geometrie folgt die Verteilungsfunktion

$$f_r = \begin{cases} f_{|E}, & \vartheta \in \left(0, \arcsin \frac{R_{\odot}}{r}\right) \\ 0, & \vartheta \in \left(\arcsin \frac{R_{\odot}}{r}, \pi/2\right) \end{cases} \quad (10.1)$$

der Winkel φ durchläuft seinen gesamten Wertebereich, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

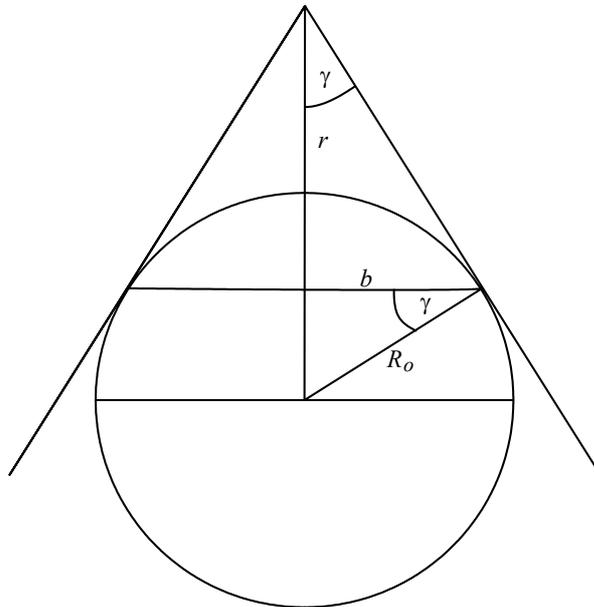


Abbildung 10.1: Zur Geometrie eines Kugelstrahlers

10.2 Energie und Energiefluß

Mit (10.1) können wir sofort die Momente im Abstand r von der Sonne berechnen. Wir beginnen mit Energie und Energiefluß. Für die Energiedichte erhalten wir

$$e = \int \hbar c k f_r d\mathbf{k} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta_{\max}} \int_{k=0}^{\infty} \hbar c k f_E k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (10.2)$$

$$e = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{R_{\odot}^2}{r^2}}}{2} a T_{\odot}^4. \quad (10.3)$$

Im Grenzfall sehr großen Abstandes, $r \gg R_{\odot}$, ergibt sich

$$e = \frac{R_{\odot}^2}{r^2} \frac{a}{4} T_{\odot}^4. \quad (10.4)$$

Die Verdünnung der Energiedichte mit steigendem Abstand ist nur darauf zurückzuführen, daß die den Beobachter erreichenden Strahlen aus einem immer kleinerem Winkelbereich stammen.

Der Energiefluß berechnet sich gemäß

$$Q_i = \int \hbar c^2 k n_i f_r d\mathbf{k} \quad (10.5)$$

mit $n_i = \{\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta\}_i$ zu

$$Q_i = \left\{ 0, 0, \frac{R_\odot^2}{r^2} \sigma_{SB} T_\odot^4 \right\}_i. \quad (10.6)$$

Für große Abstände ist folglich der Energiefluß rein konvektiv mit der Geschwindigkeit c (erinnere, daß gilt $\sigma_{SB} = ca/4$),

$$Q_i = \{0, 0, ce\}_i; \quad (10.7)$$

dann kommen die Strahlen aus einem so kleinen Winkelbereich, daß sie in guter Näherung als parallel betrachtet werden können.

Mit $R_\odot = 696\,000\text{ km}$ als Radius der Sonne und $r = 149.6 \cdot 10^6\text{ km}$ als Abstand Erde-Sonne, ergibt sich mit der Sonnentemperatur $T_\odot = 5700\text{ K}$ ein Energiefluß

$$Q_z = 1295\text{ J/sm}^2. \quad (10.8)$$

10.3 Entropie und Entropiefluß

Bei der Berechnung von Entropie und Entropiefluß gemäß (A.5, A.8) ist lediglich darauf zu achten, daß gilt $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$. Dann läßt sich mit einer partiellen Integration bzgl. k schnell zeigen, daß gilt

$$h = \frac{4}{3} \frac{e}{T_\odot}, \quad (10.9)$$

$$\phi_k = \frac{4}{3} \frac{Q_k}{T_\odot} = \{0, 0, ch\}_k. \quad (10.10)$$

Die Abhängigkeit vom Abstand ist durch e bzw. Q_k gegeben.

Für gleichgewichtsnahe Prozesse gilt üblicherweise $\phi_k = Q_k/T$ [38]. Für den Sonnenstrahl, der ja aufgrund der Anisotropie fern vom Gleichgewicht ist, ist dieser Zusammenhang nicht gültig.

10.4 Momente im Abstand r

Die weiteren Momente berechnen wir nur für den Fall $R_\odot/r \ll 1$. Die einzige nicht verschwindende Komponente der vollständigen Momente ist

$$\underbrace{u^r}_{n\text{-mal } 3 \dots 3} = \frac{u^r_{|E}(T_\odot)}{4} \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 \quad (10.11)$$

Daraus ergibt sich mit (C.6) für die entsprechende Komponente des vollständig spurfreien Momentes $u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r$

$$u_{\langle n \rangle}^r = u_{\underbrace{\langle 3 \dots 3 \rangle}_{n-mal}}^r = \bar{D}_n u^r \quad (10.12)$$

mit

$$u^r = \frac{u_{|E}^r(T_\odot)}{4} \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2, \quad (10.13)$$

$$\bar{D}_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1} (2n - 2j - 1)} \frac{n!}{(n - 2k)! 2^k k!}. \quad (10.14)$$

Einige Werte für \bar{D}_n sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
\bar{D}_n	1	1	2/3	2/5	8/35	8/63	16/231	16/429

(10.12) steht in Übereinstimmung mit unserem Resultat (8.22) für $\beta \rightarrow 1$ ($N \rightarrow \infty$) mit $\bar{D}_n = (-1)^n D_n$ ($\beta = 1, \gamma = 1$). Damit erweisen sich die ballistischen Randbedingungen im eindimensionalen Fall als sehr gute Näherung für die tatsächlich vorliegenden Momente.

10.5 Temperatur eines Hohlraumes im Abstand r

Ein Hohlraum mit adiabat isolierten Wänden habe eine kleine Öffnung, die einem schwarzen Strahler, etwa der Sonne, zugewandt sei. Die in den Hohlraum einfallende Strahlung wird im Innern vielfach absorbiert und emittiert und setzt sich dabei mit den Wänden des Hohlraumes ins Gleichgewicht, wobei sich schließlich eine Temperatur T_H einstellt. Bei der aus der Öffnung austretenden Strahlung handelt es sich also um Hohlraumstrahlung zur Temperatur T_H . Diese Temperatur berechnen wir aus dem Energieerhaltungssatz: Der Energiefluß Q_k^{ein} in den Hohlraum hinein und der Energiefluß Q_k^{aus} aus dem Hohlraum heraus müssen in ihren Beträgen übereinstimmen,

$$Q^{ein} = Q^{aus}. \quad (10.15)$$

Mit (10.6, 1.24) ist diese Bedingung äquivalent zu

$$\frac{R_\odot^2}{r^2} \sigma_{SB} T_\odot^4 = \sigma_{SB} T_H^4, \quad (10.16)$$

woraus sich sofort die Temperatur des Hohlraumes ergibt,

$$T_H = \sqrt{\frac{R_\odot}{r}} T_\odot. \quad (10.17)$$

Sei etwa $R_{\odot} = 696\,000\text{ km}$ der Radius der Sonne und $r = 149.6 \cdot 10^6\text{ km}$ der Abstand Erde-Sonne, ergibt sich mit der Sonnentemperatur $T_{\odot} = 5700\text{ K}$

$$T_H = 389\text{ K}. \quad (10.18)$$

Dieser Hohlraum und die Sonne befinden sich zwar in einem stationären Zustand, nicht jedoch im Gleichgewicht, denn es wird ständig Entropie produziert. Dieser Nichtgleichgewichtszustand wird durch die bei den Kernreaktionen im Sonneninnern freiwerdende Energie aufrecht erhalten.

Sei A die Fläche der Öffnung, dann berechnet sich die Entropieproduktion pro Zeiteinheit Σ aus der Differenz der Entropieflüsse gemäß

$$\begin{aligned} \Sigma/A &= \frac{4 Q^{aus}}{3 T_H} - \frac{4 Q^{ein}}{3 T_{\odot}} = \frac{4}{3} \sigma_{SB} \left(T_H^3 - \frac{R_{\odot}^2}{r^2} T_{\odot}^3 \right) = \\ &= \frac{4}{3} \sigma_{SB} T_{\odot}^3 \sqrt{\frac{R_{\odot}}{r}}^3 \left(1 - \sqrt{\frac{R_{\odot}}{r}} \right) = 4.14 \frac{\text{J}}{\text{sm}^2 \text{K}}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Auch wenn die Sonnenstrahlung aus einem Gleichgewichtssystem stammt, so ist doch die auf der Erde eintreffende Strahlung aufgrund ihrer extremen Anisotropie keineswegs Gleichgewichtsstrahlung. Damit ist es praktisch unmöglich, dem Sonnenstrahl eine Temperatur zuzuweisen. Man könnte die Energie-Temperatur-Beziehung des Gleichgewichtsfalles,

$$e = a\theta^4, \quad (10.20)$$

auf das Nichtgleichgewicht ausdehnen. Damit ergäbe sich für den Sonnenstrahl in großem Abstand von der Sonne gerade die Temperatur

$$\theta = \frac{T_H}{\sqrt{2}}. \quad (10.21)$$

Der dort aufgestellte Hohlraum wäre also ein geeignetes Thermometer für diese Temperaturdefinition. Unsere Vorstellung von einem Thermometer beinhaltet jedoch, daß bei der Messung, wenn sich der stationäre Zustand eingestellt hat, keine Entropie produziert wird. Dies passiert jedoch im Hohlraum. Daraus ist zu schließen, daß $\theta = \left(\frac{e}{a}\right)^{\frac{1}{4}}$ keine geeignete Temperaturdefinition im klassischen Sinn für Strahlung fern vom Gleichgewicht ist. Dennoch sind T_H bzw. θ mittels eines Thermometers im Hohlraum leicht meßbar. Damit ist die Energiedichte des Freistrahls mittels (10.20, 10.21) meßbar: Der Hohlraum stellt ein Energiemeßgerät für einen Freistrahldar¹. Mit der Frage nach der Strahlungstemperatur beschäftigt sich Anhang G.

¹Dies gilt natürlich auch, wenn der Freistrahld nicht von einem schwarzen Strahler ausgesendet wird, sondern eine von der Gleichgewichtsverteilung abweichende Frequenzverteilung aufweist.

Kapitel 11

Absorption eines Sonnenstrahles

11.1 Problemstellung

Wir betrachten das Eindringen eines ebenen Strahlungspulses in eine isotherme absorbierende Atmosphäre konstanter Dichte. Für dieses eindimensionale Problem lautet die Strahlungs-Transport-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial z} = -\kappa (f - f_{|E}(T)) \quad (11.1)$$

wobei z die Richtung des Strahles angibt. An der Stelle $z = 0$ wird nun für begrenzte Zeit ein Sonnenstrahl in die Gleichgewichtsatmosphäre eingelassen, d.h. die Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$f(t, z = 0) = f_{|E}(T) + f_r(T_\odot) F(t), \quad (11.2)$$

$$f(t = 0, z) = f_{|E}(T), \quad (11.3)$$

dabei ist $f_r(T_\odot)$ durch (10.1) gegeben und $F(t)$ ist eine Fensterfunktion,

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, \Delta t) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11.4)$$

Für die Momente lauten die Anfangs- und Randbedingungen, vergl. (10.12),

$$u_{\langle n \rangle}^r(t, z = 0) = u_{\langle n \rangle|E}^r(T) + \bar{D}_n \frac{u_{|E}^r(T_\odot)}{4} \left(\frac{R_\odot}{r} \right)^2 F(t) \quad (11.5)$$

$$u_{\langle n \rangle}^r(t = 0, z) = u_{\langle n \rangle|E}^r(T) F(t) \quad (11.6)$$

Wir wollen zunächst die Strahlungs-Transport-Gleichung lösen, dann mit dieser Lösung die Momente als Funktion von Ort und Zeit berechnen und diese schließlich mit der Lösung der Momentengleichungen vergleichen.

11.2 Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung

Für das angegebene Anfangsrandwertproblem ergibt sich die einfache Lösung

$$f(t, z) = f|_E(T) + f_r(T_\odot) F\left(t - \frac{z}{c}\right) \exp -\kappa \frac{z}{c}. \quad (11.7)$$

Hiermit läßt sich leicht das raumzeitliche Verhalten der Momente berechnen, insbesondere das der Energiedichte. Als Maß für die Momente wählen wir die dimensionslosen Größen

$$v^r = 4 \frac{u^r - u|_E^r(T)}{u|_E^r(T_\odot) \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2}. \quad (11.8)$$

Wir führen wie in Kapitel 8 andere Maße für Ort und Zeit ein,

$$\tilde{\kappa}(x) \tilde{z} = \tilde{\kappa}(x) \check{\kappa}(T_\odot) \frac{z}{c} = \kappa \frac{z}{c}, \quad (11.9)$$

$$\tilde{t} = \check{\kappa}(T_\odot) t; \quad (11.10)$$

z.B. für ein Potenzgesetz

$$\tilde{\kappa}_{PG}(x) = x^\nu, \quad \check{\kappa}_{PG}(T_\odot) = \kappa_{PG}^0 \left(\frac{k_B T_\odot}{\hbar c}\right)^\nu, \quad (11.11)$$

und für Bremsstrahlungsabsorption

$$\tilde{\kappa}_{ff}(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x^3}, \quad \check{\kappa}_{ff}(T_\odot) = D_{ff} \left(\frac{k_B T_\odot}{\hbar c}\right)^{-3}. \quad (11.12)$$

Damit berechnen wir schließlich für die Momente

$$v^r(\tilde{t}, \tilde{z}) = F(\tilde{t} - \tilde{z}) \frac{\int \frac{x^{r+2}}{e^x - 1} e^{-\tilde{\kappa}(x)\tilde{z}} dx}{\Gamma(r+3) \zeta(r+3)} \quad (11.13)$$

$$v_{(n)}^r(\tilde{t}, \tilde{z}) = \bar{D}_n v^r(\tilde{t}, \tilde{z}) \quad (11.14)$$

Das Integral muß numerisch ausgewertet werden. (11.13) ist einfach zu interpretieren: Das Randsignal bewegt sich mit der Geschwindigkeit c (bzw. 1 in den Koordinaten \tilde{t}, \tilde{z}) in die Atmosphäre hinein, seine Amplitude ist gedämpft.

11.3 Angepaßte Näherung der Verteilungsfunktion

Bei dem betrachteten Prozeß haben wir es mit einer starken Nichtlokalität des Strahlungsfeldes zu tun, die unsere lokale Theorie an eine Grenze bringt, s.a. [15]. Diese Nichtlokalität rührt

vor allem daher, daß die in einem Ort erzeugte Strahlung ungestört lange Strecken zurücklegen kann, bevor sie an einem anderem Ort mit Materie in Wechselwirkung tritt.

Wenn die Temperaturen der beiden Orte nicht allzu unterschiedlich sind, wird die um die lokale Temperatur entwickelte Verteilungsfunktion (5.17) immer noch eine gute Näherung liefern. Dies wird vor allem dann der Fall sein, wenn die freie Weglänge der Photonen klein ist.

Wir wollen nun eine für das obige Problem geeignetere Darstellung der lokalen Verteilungsfunktion suchen. Dazu rufen wir uns zunächst unsere bisherige Näherung ins Gedächtnis zurück, (5.17),

$$f \approx f_{|E}(k, T) + \sum_{r,n} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \frac{df_{|E}(k, T)}{d\Xi_{|E}} \Xi_{|E}^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}, \quad (11.15)$$

$\Xi_{|E} = \hbar ck/k_B T$. Der Vergleich mit (11.2) zeigt, daß das Auftreten der lokalen Temperatur T in den die Abweichung vom lokalen Gleichgewicht beschreibenden Termen ausgesprochen problemfremd ist. Zwar wird die tatsächliche Verteilungsfunktion approximierbar sein, aber wenn der Unterschied zwischen der Temperatur der Quelle (hier: der Sonne) von der Temperatur der Senke (hier: der Atmosphäre) stark abweicht, ist eine gute Konvergenz nicht zu erwarten.

Wir behelfen uns mit einer modifizierten Form von (11.15), die für unser Problem ausgezeichnete Ergebnisse liefert. Diese Modifikation wurde in Abschnitt 5.6 begründet. Sie besteht darin, in den Abweichungstermen von (11.15) eine andere Temperatur einzusetzen, die wir zunächst mit θ bezeichnen,

$$f \approx f_{|E}(k, T) + \sum_{r,n} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \frac{df_{\theta}(k, \theta)}{d\Xi_{\theta}} \Xi_{\theta}^r n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}, \quad (11.16)$$

dabei ist $\Xi_{\theta} = \hbar ck/k_B \theta$. Für das behandelte Problem wird sich herausstellen, daß $\theta = T_{\odot}$ die beste Wahl ist.

11.4 Lösung der Momentengleichungen

Die Auswertung der modifizierten Verteilungsfunktion wird nicht präsentiert, sondern wir formulieren sofort die eindimensionalen Momentengleichungen (8.3) für die Variablen v^r (11.8). Sie lauten mit den Bezeichnungen von oben

$$\frac{\partial v_{\langle n \rangle}^r}{\partial \tilde{t}} + \alpha_n \frac{\partial v_{\langle n-1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial v_{\langle n+1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} = - \sum_q \tilde{\Theta}_{rq} v_{\langle n \rangle}^q, \quad (11.17)$$

$$n = 0, \dots, N, v_{\langle N+1 \rangle}^r = 0, \alpha_n = \frac{n^2}{4n^2 - 1}.$$

Die auftretenden Matrizen lauten für ein Potenzgesetz

$$\tilde{\Theta}_{rq}^{PG} = \frac{\Gamma(q+3)\zeta(q+3)}{\Gamma(r+3)\zeta(r+3)} \sum_s C(r+\nu) C_{sq}^{-1} \left(\frac{\theta}{T_\odot} \right)^{r+\nu-q} \quad (11.18)$$

bzw. für Bremsstrahlungsabsorption

$$\tilde{\Theta}_{rq}^{ff} = \frac{\Gamma(q+3)\zeta(q+3)}{\Gamma(r+3)\zeta(r+3)} \sum_s \Gamma(s+r)\zeta(s+r) C_{sq}^{-1} \left(\frac{\theta}{T_\odot} \right)^{r-q-3}. \quad (11.19)$$

Wir erwarten analog zu (11.13, 11.14) Lösungen der Form

$$v^r(\tilde{t}, \tilde{z}) = F \left(\tilde{t} - \frac{c}{v_{ph}} \tilde{z} \right) \bar{v}^r(\tilde{z}), \quad (11.20)$$

$$v_{\langle n \rangle}^r(\tilde{t}, \tilde{z}) = (-1)^n D_n \left(\beta = \frac{v_{ph}}{c}, \gamma = 1 \right) v^r(\tilde{t}, \tilde{z}). \quad (11.21)$$

Dabei haben wir unsere Erkenntnis aus Kapitel 8 benutzt, daß die Momentengleichungen eine Transportgeschwindigkeit v_{ph} liefern, die erst für große Momentenzahlen N gegen c geht; wir verstehen unter v_{ph} die maximale Phasengeschwindigkeit des Systems. D_n bezeichnet die Determinanten (8.17), $\bar{v}^r(\tilde{z})$ die lokale Amplitude der Größen v^r . Einsetzen dieses Ansatzes in (11.17) liefert zunächst

$$\frac{v_{ph}}{D_n} \left(\frac{F'}{F} \left(\frac{v_{ph}}{c} D_n + \alpha_n D_{n-1} + D_{n+1} \right) \bar{v}^r - (\alpha_n D_{n-1} + D_{n+1}) \frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \tilde{z}} \right) = - \sum_q \tilde{\Theta}_{rq} \bar{v}^r$$

Mit der Rekursionsformel (8.18) gilt $\frac{v_{ph}}{c} D_n + \alpha_n D_{n-1} + D_{n+1} = 0$ ($\beta = \frac{v_{ph}}{c}, \gamma = 1$). Es folgt eine Gleichung für die Amplituden $\bar{v}^r(\tilde{z})$,

$$\frac{\partial \bar{v}^r}{\partial \frac{c}{v_{ph}} \tilde{z}} = - \sum_q \tilde{\Theta}_{rq} \bar{v}^r. \quad (11.23)$$

Die Lösung lautet

$$\bar{v}^r(\tilde{z}) = \sum_{p,s} M_{rp} M_{ps}^{-1} \exp -\alpha_p \frac{c}{v_{ph}} \tilde{z} \quad (11.24)$$

Dabei sind die α_p die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\Theta}_{rq}$ und M_{rp} ist die Matrix ihrer Eigenvektoren.

Der Vergleich von (11.20, 11.24) mit der Lösung (11.13) zeigt, daß zur Übereinstimmung beider Ergebnisse zunächst gelten muß $\frac{v_{ph}}{c} \simeq 1$, was nach den Ergebnissen von Kapitel 8 für Momentenzahlen $N \simeq 30$ der Fall ist.

Die Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung liefert für die Amplituden (11.13)

$$\bar{v}^r(\tilde{z}) = \frac{\int \frac{x^{r+2}}{e^x - 1} e^{-\tilde{\kappa}(x)\tilde{z}} dx}{\Gamma(r+3)\zeta(r+3)}. \quad (11.25)$$

Diese Gleichung muß mit (11.24) verglichen werden. Abb. 11.1 zeigt am Beispiel von Bremsstrahlungsabsorption die ausgezeichnete Übereinstimmung der exakten Lösung (gestrichelt) mit

der Lösung der Momentengleichungen für $R = 6$ wenn in (11.18, 11.19) $\theta = T_{\odot}$ gesetzt wird. Wie in Kap. 9 gibt die Wahl von kleineren Werten von R , im Bild $R = 1$, ein schlechtes Ergebnis.

Was geschieht aber, wenn wir für θ die Temperatur der absorbierenden Atmosphäre wählen, $\theta = T$, also unsere ursprüngliche Darstellung der Verteilungsfunktion beibehalten? Einige numerische Betrachtungen der Energiedichte am Beispiel der Bremsstrahlung zeigen, daß in diesem Fall die Übereinstimmung von (11.24) und (11.25) drastisch vom Verhältnis T/T_{\odot} abhängt. Für Werte dieses Verhältnisses aus dem Intervall $\{0.6, 2\}$ finden wir eine gute Übereinstimmung, wenn der in Kap. 9 festgestellte Wert $R = 6$ gewählt wird, siehe Abb. 11.2, 11.3. Außerhalb dieses Intervalles ist eine Übereinstimmung nicht zu erreichen, siehe Abb. 11.4. Auch eine Erhöhung der Zahl R kann hier das Ergebnis nicht verbessern.

Wir stellen fest, daß die Wahl $\theta = T_{\odot}$ das beste Ergebnis liefert. Hierdurch wird die Nichtlokalität des Problems am besten berücksichtigt.

Bei der Wahl $\theta = T$ wird die Nichtlokalität des Problems ignoriert. Dies ist möglich wenn die Temperaturen der über die Strahlung kommunizierenden Materievolumina an verschiedenen Orten sich um einen Faktor aus (0.6, 2) unterscheiden.

Wir schließen, daß man die Nichtlokalität in Betracht ziehen sollte, um mit den Momentengleichungen vernünftige Ergebnisse zu erzielen. D.h. man hat in der Verteilungsfunktion (11.16), bzw. in den Matrizen auf den rechten Seiten der Momentengleichungen die Temperaturen der Strahlungsquelle einzusetzen, und *nicht* die Temperatur der Materie.

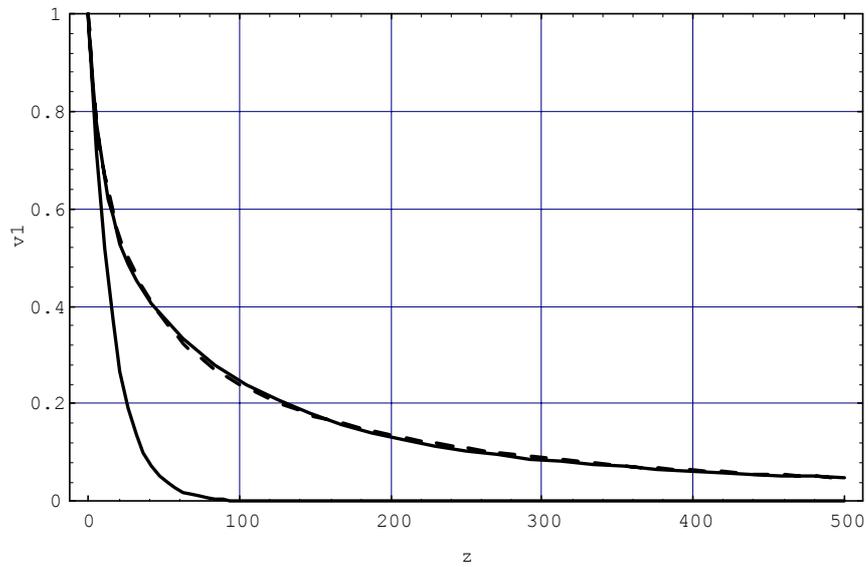


Abbildung 11.1: $\bar{v}^1(\tilde{z})$ für Bremsstrahlungsabsorption aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und aus den Momentengleichungen für $R = 1$ und 6 . Temperaturverhältnis $\theta/T_{\odot} = 1$.

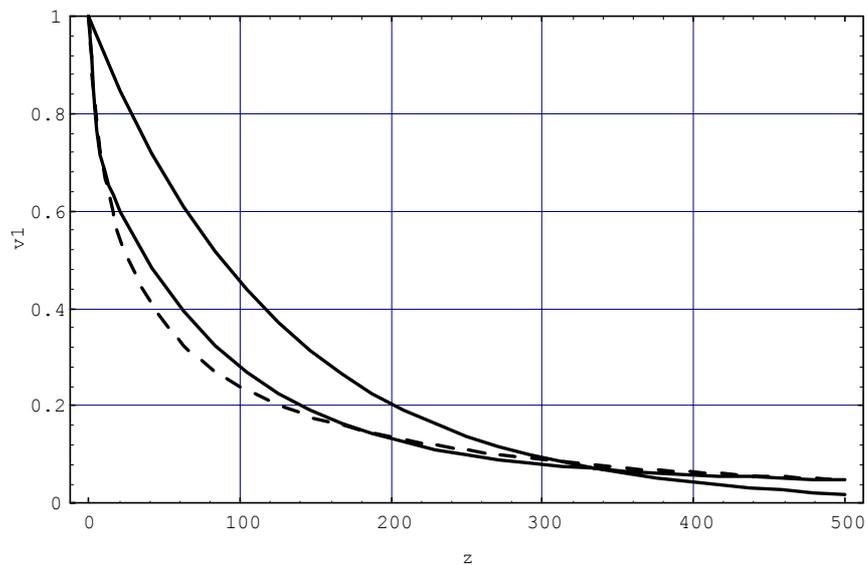


Abbildung 11.2: $\bar{v}^1(\tilde{z})$ für Bremsstrahlungsabsorption aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und aus den Momentengleichungen für $R = 1$ und 6 . Temperaturverhältnis $\theta/T_{\odot} = 2$.

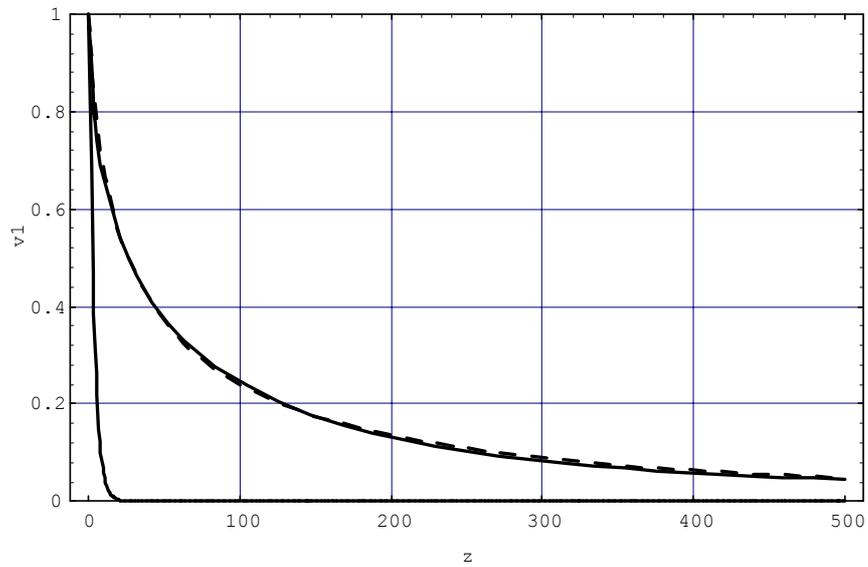


Abbildung 11.3: $\bar{v}^1(\tilde{z})$ für Bremsstrahlungsabsorption aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und aus den Momentengleichungen für $R = 1$ und 6 . Temperaturverhältnis $\theta/T_{\odot} = 0.6$.

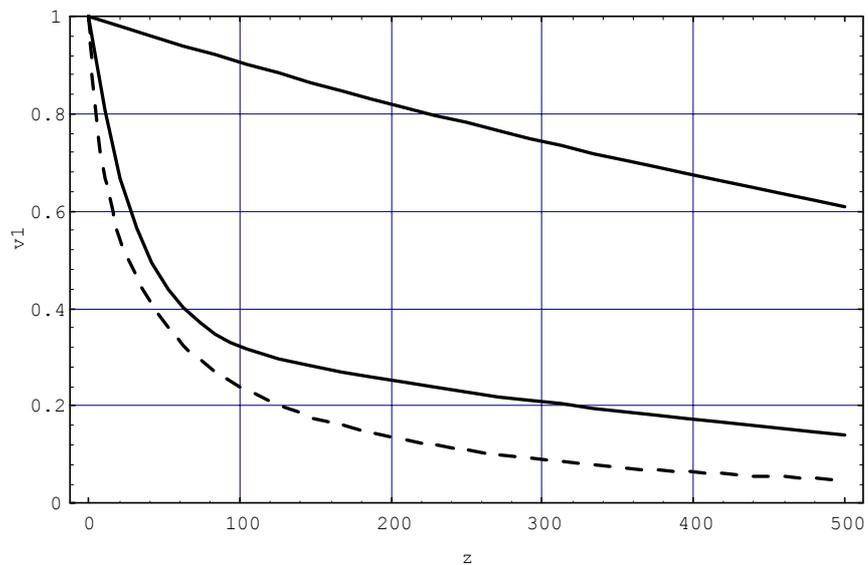


Abbildung 11.4: $\bar{v}^1(\tilde{z})$ für Bremsstrahlungsabsorption aus der Strahlungs-Transport-Gleichung (gestrichelt) und aus den Momentengleichungen für $R = 1$ und 6 . Temperaturverhältnis $\theta/T_{\odot} = 4$.

Kapitel 12

Absorption und Streuung

12.1 Momentengleichungen

Für die Absorption eines Strahles läßt sich, wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, die Strahlungs-Transport-Gleichung analytisch lösen. Dies ist nicht mehr möglich, wenn zusätzlich Streuung ins Spiel kommt. In diesem Fall muß die Strahlungs-Transport-Gleichung numerisch gelöst werden. Hier bieten die in dieser Arbeit abgeleiteten Momentengleichungen eine willkommene Alternative zur Berechnung des Energietransportes.

Mit denselben Bezeichnungen wie im letzten Kapitel lauten sie für die dimensionslosen Größen v^r

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{\langle 0 \rangle}^r}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial v_{\langle 1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} &= -\sum_q \tilde{\Theta}_{rq} v_{\langle n \rangle}^q, \\ \frac{\partial v_{\langle n \rangle}^r}{\partial \tilde{t}} + \alpha_n \frac{\partial v_{\langle n-1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial v_{\langle n+1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} &= -\sum_q \hat{\Theta}_{rq} v_{\langle n \rangle}^q \quad (12.1) \\ \frac{\partial v_{\langle N \rangle}^r}{\partial \tilde{t}} + \alpha_N \frac{\partial v_{\langle N-1 \rangle}^r}{\partial \tilde{z}} &= -\sum_q \hat{\Theta}_{rq} v_{\langle N \rangle}^q.\end{aligned}$$

$n = 0, \dots, N$, $v_{\langle N+1 \rangle}^r = 0$, $\alpha_n = \frac{n^2}{4n^2-1}$. Auf die Betrachtung anisotroper Streuung wurde hier verzichtet. Die Matrix der Streukoeffizienten $\hat{\Theta}_{rq}$ ist daher definiert gemäß

$$\hat{\Theta}_{rq} = \tilde{\Theta}_{rq} + \frac{1}{\tilde{\kappa}(T_\odot)} \frac{\Gamma(q+3) \zeta(q+3)}{\Gamma(r+3) \zeta(r+3)} \left(\frac{k_B T_\odot}{\hbar c} \right)^{q-r} \Theta_{rq}^{St.} \quad (12.2)$$

z.B. gilt für Rayleigh-Streuung

$$\hat{\Theta}_{rq} = \tilde{\Theta}_{rq} + \frac{\zeta_R^0 T_\odot^4}{\tilde{\kappa}(T_\odot)} \left(\frac{\theta}{T_\odot} \right)^{r+4-q} \frac{\Gamma(q+3) \zeta(q+3)}{\Gamma(r+3) \zeta(r+3)} \sum_t C(r+4, t) C_{tq}^{-1} \quad (12.3)$$

und für Thomson-Streuung

$$\hat{\Theta}_{rq} = \tilde{\Theta}_{rq} + \frac{\zeta_T}{\tilde{\kappa}(T_\odot)} \delta_{rq}. \quad (12.4)$$

Hier muß nun wieder gefragt werden, welche Momentenzahlen R, N benötigt werden, um den Energietransport vernünftig zu beschreiben. Wann die Zahl N eingeschränkt werden kann, haben wir bereits in Kapitel 8 gesehen. Die Zahl R müßte wieder aus einem Vergleich mit einer Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung bestimmt werden. Wir können aber davon ausgehen, daß die Frequenz-Potenzen in den Streukoeffizienten sich auf ähnliche Weise auswirken wie die in einem Potenz-Absorptions-Gesetz.

Dann wird R bei reiner Thomson-Streuung nur durch die Absorptionsprozesse bestimmt, während bei Rayleigh-Streuung etwa $R = 12$ gesetzt werden muß (vergl. den letzten Abschnitt von Kap. 8).

12.2 Ausbreitung eines Strahlungspulses

12.2.1 Gleichungen

Um das Verständnis des Wechselspiels von Absorption und Streuung zu vertiefen, betrachten wir das Eindringen eines Freistrahlpulses in eine Atmosphäre. Zur Berechnung wurde der Einfachheit halber graue Materie betrachtet, also $r = 1$; zudem wurde $N = 4$ gewählt, also die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\langle 0 \rangle}^1}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial v_{\langle 1 \rangle}^1}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{1}{\tilde{\mu}} v_{\langle n \rangle}^1, \\ \frac{\partial v_{\langle n \rangle}^1}{\partial \tilde{t}} + \alpha_n \frac{\partial v_{\langle n-1 \rangle}^1}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial v_{\langle n+1 \rangle}^1}{\partial \tilde{z}} &= -\frac{1}{\hat{\mu}} v_{\langle n \rangle}^1, \end{aligned} \quad (12.5)$$

$n = 1, \dots, 4$, $v_{\langle 5 \rangle}^1 = 0$ mit

$$\frac{1}{\hat{\mu}} = \frac{1}{\tilde{\mu}} + \frac{\zeta_T}{\tilde{\kappa}} \quad (12.6)$$

12.2.2 Lösung

An der Stelle $\tilde{z} = 0$ wird ein Freistrahlpuls der Dauer $\Delta \tilde{t}$ vorgegeben, die Amplitude beträgt $v^1 = 1$. Am Ort $\frac{\tilde{z}}{(v_{Ph}/c)_{\max} \Delta \tilde{t}} = 20$ wird das Signal detektiert. Der Strahl durchläuft eine Modellatmosphäre mit $\tau = \hat{\mu} / \Delta \tilde{t} = 2$, $m = \hat{\mu} / \tilde{\mu} = 0.2$. Abb. 12.1 zeigt die Energie am Detektor. Das Signal besteht aus zwei Teilen. Zunächst wird der Detektor von einem Peak der Breite $\Delta \tilde{t}$ erreicht. Dieser Peak wird erzeugt von ballistischen Photonen, die die Atmosphäre ohne

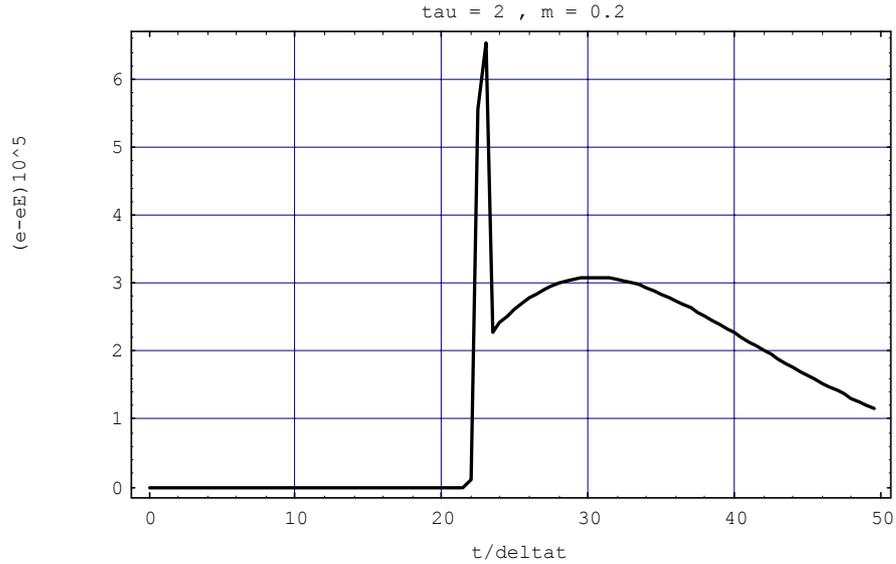


Abbildung 12.1: *Energiedichte v^1 am Ort $\frac{\tilde{z}}{(v_{Ph}/c)_{\max}\Delta\tilde{t}} = 20$*

jede Wechselwirkung passieren (Flugdauer $\tilde{t}_{ball} = \tilde{z}/(v_{Ph}/c)_{\max}$). Die Amplitude ist wesentlich kleiner als die Eingangsamplitude, da aufgrund der Wechselwirkungen Photonen entzogen werden.

Im Anschluß an den ballistischen Peak folgt eine breite Schleppe. Diese stammt von Photonen, die aufgrund von Streuprozessen durch die Atmosphäre diffundieren.

Für andere Werte der Parameter τ und m zeigen die Kurven dasselbe Verhalten mit folgenden charakteristischen Unterschieden: Bei festem τ und steigendem m ist die diffusive Schleppe immer weniger ausgeprägt. Im Grenzfall $m = \hat{\mu}/\tilde{\mu} = 1$, d.h. keine Streuung, wird die Schleppe nicht mehr detektiert, sondern nur der ballistische Peak. Dieser ist dann aufgrund der Absorptionsprozesse gedämpft.

Im Grenzfall $m = \hat{\mu}/\tilde{\mu} = 0$, d.h. keine Absorption, ist die diffusive Schleppe stärker ausgeprägt als in Abb. 12.1. Der ballistische Peak ist aufgrund der Streuprozesse gedämpft. Da die Streuung der Strahlung keine Energie entzieht, ist die Fläche unter der Kurve gleich $1 \cdot \Delta\tilde{t}$, also gleich der Fläche unter dem Eingangssignal.

Bei festem m und steigendem τ , d.h. einer immer geringeren Anzahl von Wechselwirkungen beliebiger Art, steigt die Amplitude des ballistischen Peaks, während die Schleppe an Höhe verliert. Im wechselwirkungsfreien Fall $\tau \rightarrow \infty$ verschwindet die Schleppe, das Signal läuft ungedämpft und unverzerrt durch die Atmosphäre. Für sehr kleine Werte von τ verschwindet der ballistische Peak und es ist nur noch eine diffusive Ausbreitung der Strahlung zu beobachten.

SCHWEIZER [45] zeigt mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode eine ausgezeichnete Übereinstim-

mung zwischen einer Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung und dem Energiesystem ($r = 1$) für den Fall, daß Thomson-Streuung der beherrschende Prozeß ist. Dann ist ζ_T viel größer als alle anderen Absorptions- und Streukoeffizienten und die Matrix $\hat{\Theta}_{rq}$ ist (im wesentlichen) nur auf der Diagonale besetzt (6.26). Dann entkoppeln die Systeme mit verschiedenem Superskript r - wir sind von diesem Resultat nicht überrascht. Wenn stark frequenzabhängige Koeffizienten die führende Rolle spielen, muß jedoch, wie wir gezeigt haben, die Kopplung unbedingt berücksichtigt werden.

Teil IV

Kovariante Momentengleichungen

Kapitel 13

Kovariante Gleichungen für die Materie

Bisher haben wir die Gleichungen der Strahlungsthermodynamik nur in dem System betrachtet, in dem die Materie ruht, also für einen Beobachter, der im lokalen Ruhesystem (LR) der Materie ruht. Wenn die Materie als Ganzes ruht, ist diese Darstellung sinnvoll. Da sich aber im allgemeinen die Geschwindigkeit der Materie von Ort zu Ort ändert, ist diese Beschreibung nicht geeignet. Vielmehr müssen wir Gleichungen finden, die die Strahlung für beliebige Beobachter, beispielsweise für Beobachter im Laborsystem, beschreiben.

Die Aufgabe ist also die Transformation der Gleichungen aus dem LR in das Beobachtersystem, bzw. eine beobachterinvariante Darstellung der Gleichungen. Mit anderen Worten: die Gleichungen der Strahlungsthermodynamik sind in den Formalismus der Relativitätstheorie einzufügen. Dabei wollen wir auch beschleunigte Bezugssysteme zulassen, also die Gleichungen in kovarianter Form angeben.

Eine kurze axiomatische Einführung in die Relativitätstheorie bietet Anhang H; dort werden auch die im folgenden verwendeten Größen erläutert.

Da wir Strahlung in Wechselwirkung mit Materie betrachten, benötigen wir auch die die Materie beschreibenden Gleichungen. Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, d.h. wir betrachten ein einkomponentiges Gas, das sich so nahe am Gleichgewicht befindet, daß Viskosität und Wärmeleitfähigkeit vernachlässigt werden können. Weiterführende Theorien sind der Literatur zu entnehmen [23][37][38].

13.1 Teilchenzahlbilanz

13.1.1 Lorentzinvarianz

Formuliert für die Teilchenzahldichte $n = \rho/m$ lautet die Massenbilanz (3.1)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (13.1)$$

Mit den Koordinaten $x^A = \{ct, x_i\}^A$ können wir sie schreiben als

$$\frac{\partial N^A}{\partial x^A} = 0, \quad (13.2)$$

wobei wir den Teilchendichte-Teilchenfluß-Vektor N^A definiert haben gemäß

$$N^A = \{nc, n v_i\}^A. \quad (13.3)$$

Wir verlangen, daß (13.2) lorentzinvariant sein soll. Da $\partial/\partial x^B$ nach (H.12) ein 4-Vektor ist, muß dies auch für N^A gelten. Mit der Invarianten $N^A N_A$ können wir schreiben ($\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}^{-1}$)

$$N^A = \sqrt{\frac{N^A N_A}{c^2}} \gamma \{c, v_i\}^A = n_{LR} U^A. \quad (13.4)$$

Hier ist

$$U^A = \gamma \{c, v_i\}^A \quad (13.5)$$

die 4-Geschwindigkeit der Materie, d.h. die Geschwindigkeit eines Beobachters in einem Inertialsystem, für den die Materie ruht. Für diesen Beobachter gilt $U^A = \{c, 0, 0, 0\}^A$;

$$n_{LR} = \sqrt{\frac{N^A N_A}{c^2}} \quad (13.6)$$

ist die Teilchenzahldichte, die er wahrnimmt. Der Index LR (Lokales Lorentz-Ruhesystem) kennzeichnet im folgenden dieses Beobachtersystem. Damit lautet (13.2)

$$\frac{\partial n_{LR} U^A}{\partial x^A} = 0; \quad (13.7)$$

dies ist eine Gleichung für die Unbekannten n_{LR}, U^A .

13.1.2 Kovarianz

Die kovariante Form der Teilchenzahlbilanz ist nicht ohne Subtilität. Vom Vektor N^A wird verlangt, daß er sich vom lokalen Inertialsystem X^A zum Beobachtersystem x^A transformiert gemäß [38]

$$N_{(x)}^A = \left| \frac{\partial X^C}{\partial x^D} \right| \frac{\partial x^A}{\partial X^B(x)} N_{(X)}^A, \quad (13.8)$$

es folgt

$$N^A_{(x)} = \sqrt{-g} n_{LR} U^A_{(x)} \quad (13.9)$$

(g ist die Determinante der Metrik g^{AB}). Aufgrund dieser Eigenschaft kommt man zu der kovarianten Gleichung

$$(n_{LR} U^A)_{;A} = 0 \quad (13.10)$$

während für den Vektor N^A in jedem Beobachtersystem die Gleichung

$$\frac{\partial N^A}{\partial x^A} = 0 \quad (13.11)$$

gilt. Mit $N^A = \{nc, nv_i\}^A$ gilt also in jedem Beobachtersystem der Erhaltungssatz (13.1).

13.2 Energie-Impuls-Tensor

13.2.1 Lorentzinvarianz

Die Bilanzen für Impuls und Gesamtenergie (3.2, 3.3) lauten für ein Euler-Fluid ($q_j = 0$, $t_{ij} = -p\delta_{ij}$) im klassischen Fall

$$\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_i v_j + p\delta_{ij})}{\partial x_j} = -P_{p_i} \quad (13.12)$$

$$\frac{\partial \varrho \left(u + \frac{v^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\varrho \left(u + \frac{v^2}{2}\right) v_j + p v_j\right)}{\partial x_j} = -P_e \quad (13.13)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$\frac{\partial T^{AB}}{\partial x^B} = -P^A, \quad (13.14)$$

wenn wir den Energie-Impuls-Tensor T^{AB} und den Produktionsvektor P^A identifizieren als

$$T^{AB} = \begin{bmatrix} \varrho \left(u + \frac{v^2}{2}\right) & \frac{1}{c} \left(\varrho \left(u + \frac{v^2}{2}\right) v_j + p v_j\right) \\ c\varrho v_i & \varrho v_i v_j + p\delta_{ij} \end{bmatrix}^{AB}, \quad (13.15)$$

$$P^A = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} P_e \\ P_{p_i} \end{bmatrix}^A. \quad (13.16)$$

Gleichung (13.14) muß lorentzinvariant sein, d.h. T^{AB} und P^A müssen 4-Tensoren sein. Im klassischen Grenzfall ($v \ll c$) muß T^{AB} sich auf die Form (13.15) reduzieren. Es stellt sich heraus, daß T^{AB} dann folgende Gestalt haben muß [38]

$$T^{AB} = (n_{LR} m c^2 + n_{LR} u) \frac{1}{c^2} U^A U^B - p \left(\eta^{AB} - \frac{1}{c^2} U^A U^B \right) \quad (13.17)$$

(η^{AB} ist die Lorentz-Metrik). Wir definieren den Projektor

$$\Delta^{AB} = \eta^{AB} - \frac{1}{c^2} U^A U^B \quad (13.18)$$

sowie die Gesamt-Energiedichte der Materie

$$e = n_{LR} m c^2 + n_{LR} u \quad (13.19)$$

und können schreiben

$$T^{AB} = e \frac{1}{c^2} U^A U^B - p \Delta^{AB}; \quad (13.20)$$

es gilt

$$T^{AB} \frac{1}{c^2} U_A U_B = e, \quad (13.21)$$

$$T^{AB} \Delta_{BC} = -3p. \quad (13.22)$$

Die letzten beiden Gleichungen folgen aus den Eigenschaften des Projektors

$$\begin{aligned} \Delta^{AB} U_B &= 0 \\ \Delta^{AB} \Delta_{BC} &= \eta^A_C - \frac{1}{c^2} U^A U_C = \Delta^A_C \\ \Delta^{AB} \Delta_{BA} &= \Delta^A_A = 3 \end{aligned} \quad (13.23)$$

13.2.2 Kovarianz

Die kovariante Energie-Impulsgleichung lautet

$$T^{AB}{}_{;B} = -P^A \quad (13.24)$$

oder, mit der Definition der kovarianten Ableitung

$$\frac{\partial T^{AB}}{\partial x^B} = -\Gamma_{BC}^A T^{CB} - \Gamma_{BC}^B T^{AC} - P^A. \quad (13.25)$$

Energie und Impuls sind also keine Erhaltungsgrößen. Neben der Produktion P^A durch Wechselwirkung mit Strahlung gibt es noch Zufuhren von Energie und Impuls aufgrund des Gravitationsfeldes ($\Gamma_{BC}^A = 0$ im gravitationsfreien Fall).

Die Zerlegung (13.20) behält ihre Gültigkeit, wenn nur der Projektor umdefiniert wird als

$$\Delta^{AB} = g^{AB} - \frac{1}{c^2} U^A U^B. \quad (13.26)$$

Ergänzt um Zustandsgleichungen für $p = p(n_{LR}, T)$ und $u = u(n_{LR}, T)$ haben wir in (13.10, 13.24) mit (13.20) fünf Gleichungen für die fünf Variablen Temperatur T , Teilchenzahldichte

n_{LR} und Geschwindigkeit U^A . Man beachte, daß U^A wegen $U^A U_A = c^2$ nur drei unabhängige Komponenten hat. Die Temperatur T wird per Definition im Ruhesystem gemessen.

Diese Gleichungen bilden erst zusammen mit den Gleichungen der Strahlungsthermodynamik ein geschlossenes Gleichungssystem, denn es tritt in ihnen noch der Produktionsvektor P^A auf. Diesen werden wir aus der Strahlungsthermodynamik bestimmen.

Kapitel 14

Kovariante Gleichungen für die Strahlung

14.1 Strahlungs-Transport-Gleichung

14.1.1 Lorentzinvarianz

Die Strahlungs-Transport-Gleichung für die Verteilungsfunktion $f(t, x_i, k_i)$ hatten wir im Ruhesystem der Materie formuliert. Wir können sie schreiben als

$$\hbar k \frac{\partial f}{\partial ct} + \hbar k_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \hbar \frac{k}{c} \mathcal{S}, \quad (14.1)$$

hier werden alle Größen im Ruhesystem gemessen. Mit dem 4-Impuls der Photonen

$$p^A = \{\hbar k, \hbar k_i\}^A \quad (14.2)$$

erhalten wir

$$\left(p^B \frac{\partial f}{\partial x^B} \right)_{LR} = \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR}. \quad (14.3)$$

Die Verteilungsfunktion $f(x^A, p^i)$ ist ein invarianter Skalar [9][23][34]¹, p^A ist ein 4-Vektor; damit ist die linke Seite dieser Gleichung ein lorentzinvarianter Skalar. Dies trifft dann auch für die rechte Seite zu, d.h. der Produktionsterm ist invariant². Die lorentzinvariante Strahlungs-Transport-Gleichung lautet also

$$p^B \frac{\partial f}{\partial x^B} = \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR}. \quad (14.4)$$

¹Tatsächlich wird f so *definiert*, daß es sich um einen Skalar handelt. Eine abweichende Meinung wird von OXENIUS [40] vertreten.

²Jede in einem bestimmten System gemessene Größe ist eine Invariante.

Da wir den Produktionsterm stets im Ruhesystem auswerten werden, ist diese Darstellung ausreichend.

Man darf sich nicht daran stören, daß das lokale Ruhesystem hier ausgezeichnet ist. Es spielt eine besondere Rolle, weil dort die Gleichgewichtsverteilung isotrop (und gleich der Planck-Verteilung) ist.

14.1.2 Kovarianz

Mit der Bewegungsgleichung für ein wechselwirkungsfreies Photon (H.37),

$$\frac{d^2 x^B}{d\lambda^2} = 0 \quad (14.5)$$

und der Definition des 4-Impulses (H.38)

$$p^B = \frac{dx^B}{d\lambda} \quad (14.6)$$

(λ ist ein geeigneter Bahnparameter) können wir (14.4) schreiben als

$$\frac{df}{d\lambda} = \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR}. \quad (14.7)$$

Wir verlangen die Gültigkeit dieser Gleichung auch in Anwesenheit eines Gravitationsfeldes. Dann lautet aber die Bewegungsgleichung (H.40)

$$\frac{dp^A}{d\lambda} = -\Gamma_{BC}^A p^B p^C \quad (14.8)$$

und wir erhalten die Strahlungs-Transport-Gleichung als³

$$p^B f_{;B} - \Gamma_{BC}^k p^B p^C \frac{\partial f}{\partial p^k} = \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR}. \quad (14.9)$$

Der invariante Produktionsterm wird im lokalen Lorentz-Ruhe-System der Materie gemessen. Da wir ihn immer in diesem System auswerten werden, benötigen wir für ihn keine Darstellung durch Größen in anderen Systemen.

Die hier präsentierte "Ableitung" der kovarianten Strahlungs-Transport-Gleichung rechtfertigt sich durch das richtige Ergebnis. Die strenge Begründung von (14.9) findet sich in den Arbeiten von CHERNIKOV [9][10][11] und MARLE [34].

³Es gilt $\partial f / \partial x^A = f_{;A}$.

14.2 Momente

14.2.1 Zerlegung von p^A

Wir suchen nun nach der relativistischen Verallgemeinerung der in den ersten Teilen dieser Arbeit definierten Momente der Verteilungsfunktion. Dazu benötigen wir eine Zerlegung des Photon-4-Impulses in einen Anteil parallel zu U^A und einen dazu senkrechten Anteil,

$$p^A = \alpha \left(\frac{1}{c} U^A + L^A \right). \quad (14.10)$$

Es soll gelten

$$L^A U_A = 0 \quad (14.11)$$

und es folgt

$$\alpha = \frac{p^A U_A}{c} = p_{LR}^0, \quad (14.12)$$

denn im momentanen Lorentz-Ruhsystem gilt $U_{LR}^A = \{c, 0, 0, 0\}^A$. Der Vektor L^A hat aufgrund (14.11) im Ruhsystem keine Zeitkomponente, $L_{LR}^A = \{0, L_i^{LR}\}^A$. Wir erhalten also für den 4-Impuls im Ruhsystem (14.2)

$$p_{LR}^A = p_{LR}^0 \{1, L_i^{LR}\}^A = \hbar k \{1, n_i\}^A. \quad (14.13)$$

Wir schließen, daß der Vektor L^A im Ruhsystem gleich dem Richtungsvektor n_i ist, er ist also seine kovariante Verallgemeinerung. Es gilt

$$L^A L_A = -1, \quad (14.14)$$

$$p^A \Delta_A^C = p_{LR}^0 L^C \quad (14.15)$$

14.2.2 Vollständige Momente

In Anlehnung an ANDERSON&SPIEGEL [2] definieren wir vollständige Momente gemäß ($dP = \sqrt{-g} d^3p/p_0$ ist das invariante Impulsraumelement, vergl. (H.65))

$$A_r^{A_1 A_2 \dots A_N} = \int (p_{LR}^0)^{r+1-N} p^{A_1} p^{A_2} \dots p^{A_N} f dP. \quad (14.16)$$

Da f eine Invariante ist⁴, handelt es sich bei den $A_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ selbstverständlich um 4-Tensoren. Diese haben folgende Eigenschaften:

$$A_r^{A_1 A_2 \dots A_{N-2} A_{N-1} A_{N-1}} = 0; \quad (14.17)$$

$$\frac{1}{c} A_r^{A_1 A_2 \dots A_N} U_{A_N} = A_r^{A_1 A_2 \dots A_{N-1}} \quad (14.18)$$

⁴In diesem Teil der Arbeit folgen wir der Definition (1.9) der Verteilungsfunktion.

Die vollständigen Momente $A_r^{A_1 A_2 \dots A_n}$ sind symmetrische spurfreie 4-Tensoren, daher haben sie $(N+1)^2$ unabhängige Elemente.

14.2.3 Energie-Impuls-Tensor

Der Energie-Impuls-Tensor der Strahlung ist gegeben durch

$$T^{AB} = c A_1^{AB} = c \int p^A p^B f dP. \quad (14.19)$$

Dieser Zusammenhang ergibt sich ganz natürlich in Lorentzsystemen, wenn $p_0 = p^0$ und $p^A = \{E/c, p_i\}^A$ in Betracht gezogen wird: $T^{00} = \int E f d^3p$ ist die Energiedichte, $cT^{0i} = c^2 \int p_i f d^3p$ der Energiefluß, $\frac{1}{c}T^{i0} = \int p_i f d^3p$ die Impulsdichte und $T^{ij} = \int p_i \frac{p_j}{p^0} f d^3p$ ist der Impulsfluß.

Aufgrund von (14.18) ist der Energie-Impuls-Tensor in den Momenten $A_1^{A_1 A_2 \dots A_N}$ ($N \geq 2$) enthalten.

14.2.4 Projizierte spurfreie Momente

Mit der Zerlegung (14.10) lautet die lorentzinvariante Verallgemeinerung der Momente $u_{i_1 \dots i_n}^r = \int k^r n_{i_1} \dots n_{i_n} f d\mathbf{k}$

$$M_r^{A_1 \dots A_n} = \int (p_{LR}^0)^{r+1} L^{A_1} \dots L^{A_n} f dP. \quad (14.20)$$

Im Ruhe-Lorentz-System gilt

$$(M_r^{i_1 \dots i_n})_{LR} = \hbar^r u_{i_1 \dots i_n}^r, \quad (14.21)$$

alle anderen Komponenten (min. ein Index gleich 0) verschwinden im Ruhesystem.

Die $M_r^{A_1 \dots A_n}$ haben folgende Eigenschaften:

$$M_r^{A_1 \dots A_n} U_{A_n} = 0, \quad (14.22)$$

$$M_r^{A_1 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_{n-1}} = -M_r^{A_1 \dots A_{n-2}}. \quad (14.23)$$

Aufgrund der ersten Eigenschaft (14.22) spricht man von projizierten Momenten [49]: die $M_r^{A_1 \dots A_n}$ haben keinen Anteil in Richtung von U^A . Aufgrund der zweiten Eigenschaft sind nur die spurfreien Anteile der $M_r^{A_1 \dots A_n}$ voneinander unabhängig: es genügt, die spurfreien Anteile $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$ zu betrachten (vergl. (4.3)). Im Ruhesystem sind die $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$ symmetrische spurfreie 3-Tensoren, daher haben sie $(2n+1)$ unabhängige Elemente.

Mit Hilfe von (14.10) können wir die vollständigen Momente (14.16) zerlegen gemäß

$$A_r^{A_1 A_2 \dots A_N} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{1}{c^{N-k}} M_r^{(A_1 \dots A_k)} U^{A_{k+1}} \dots U^{A_N}. \quad (14.24)$$

Mit Hilfe von (C.12) können wir weiterhin die projizierten Momente durch die projizierten spurfreien Momente ausdrücken,

$$M_r^{A_1 \dots A_n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,k} (-1)^k (\Delta^{A_1 A_2} \dots \Delta^{A_{2k-1} A_{2k}} M_r^{(A_{2k+1} \dots A_n)} + \dots (P_{nk} \text{ Terme})). \quad (14.25)$$

Mit (14.24, 14.25) lassen sich die $A_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ durch die $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$ darstellen. Die projizierten spurfreien Momente können aus den vollständigen Momenten mittels der folgenden Vorschrift bestimmt werden:

$$M_r^{(B_1 \dots B_k)} = A_r^{A_1 \dots A_N} \Delta_{A_1}^{(B_1} \dots \Delta_{A_k}^{B_k)} \frac{1}{c} U_{A_{k+1}} \dots \frac{1}{c} U_{A_N} \quad (14.26)$$

14.3 Momentengleichungen für die Strahlung

14.3.1 Vollständige Momente

Multiplikation der Strahlungs-Transport-Gleichung mit $(p_{LR}^0)^{r-N} p^{A_1} p^{A_2} \dots p^{A_N} \frac{\sqrt{-g}}{p_0}$ und anschließende Integration über $d^3 p$ liefert die Gleichungen für die vollständigen Momente. Mit einigen partiellen Integrationen und mit $(\ln \sqrt{-g})_{;A} = \Gamma_{BA}^B$ sowie der Identität (H.66) erhalten wir

$$A_r^{A_1 A_2 \dots A_N B}_{;B} + (N-r) A_r^{A_1 A_2 \dots A_N B D} \frac{1}{c} U_{B;D} = \mathcal{P}_r^{A_1 A_2 \dots A_N}. \quad (14.27)$$

Hier haben wir den Produktionstensor $\mathcal{P}_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ definiert durch

$$\mathcal{P}_r^{A_1 A_2 \dots A_N} = \int (p_{LR}^0)^{r-N} p^{A_1} p^{A_2} \dots p^{A_N} \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR} dP. \quad (14.28)$$

14.3.2 Projizierte spurfreie Momente

Die kompakten Gleichungen (14.27) sind von bestechender Eleganz. Allerdings sind sie für konkrete Berechnungen nicht geeignet. Hierfür wählt man besser Gleichungen für die $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$.

Multiplikation von (14.27) für $N = n$ mit $\Delta_{A_1}^{(B_1} \dots \Delta_{A_n}^{B_n)}$ und liefert nach einer längeren

Rechnung

$$\begin{aligned}
& DM_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} + \nabla_C M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle C} + \\
& + \frac{1}{c} DU_D \left\{ (n-r-1) M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle D} + n g^{D \langle B_1} M_r^{\langle B_2 \dots B_n \rangle} + n \frac{1}{c} U^{\langle B_1} M_r^{\langle B_2 \dots B_n \rangle D} \right\} + \\
& + \frac{1}{c} \nabla_C U_D \left\{ (n-r) M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle CD} + M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} g^{CD} + n g^{D \langle B_1} M_r^{\langle B_2 \dots B_n \rangle C} + \right. \\
& \quad \left. + n \frac{1}{c} U^{\langle B_1} M_r^{\langle B_2 \dots B_n \rangle CD} \right\} \\
& = P_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle}
\end{aligned} \tag{14.29}$$

Der Produktionstensor ist gegeben durch

$$P_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} = \Delta_{A_1}^{\langle B_1} \dots \Delta_{A_n}^{B_n \rangle} \mathcal{P}_r^{A_1 \dots A_n} = \int (p_{LR}^0)^r L^{\langle B_1} \dots L^{B_n \rangle} \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR} dP. \tag{14.30}$$

Die Abkürzungen D und ∇_C sind definiert wie folgt:

$$D\Psi = \frac{1}{c} U^C \Psi_{;C}, \quad \nabla_C \Psi = \Delta_C^D \Psi_{;D} \tag{14.31}$$

Es gilt

$$\Psi_{;C} = \frac{1}{c} U_C D\Psi + \nabla_C \Psi, \tag{14.32}$$

im Ruhesystem reduzieren diese Größen sich auf die Zeit- bzw. Ortsableitung,

$$(D\Psi)_{LR} = \frac{\partial \Psi}{\partial ct}, \quad (\nabla_C \Psi)_{LR} = \left\{ 0, \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right\}_C. \tag{14.33}$$

Die Gleichungen (14.29) sind noch nicht für die vollständig spurfreien Momente formuliert. Dies gelingt mit Hilfe der Beziehungen (C.21)

$$M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle C} = M_r^{\langle B_1 \dots B_n C \rangle} - \frac{n}{2n+1} M_r^{\langle \langle B_1 \dots B_{n-1} \rangle \Delta^{B_n} \rangle C} \tag{14.34}$$

$$\begin{aligned}
M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle CD} &= M_r^{\langle B_1 \dots B_n CD \rangle} - \frac{n}{2n+3} \left(M_r^{\langle D \langle B_1 \dots B_{n-1} \rangle \Delta^{B_n} \rangle C} + M_r^{\langle C \langle B_1 \dots B_{n-1} \rangle \Delta^{B_n} \rangle D} \right) + \\
&\quad - \frac{1}{2n+3} M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} \Delta^{CD} + \frac{n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)} \Delta^{C \langle B_1} M_r^{\langle B_2 \dots B_{n-1} \rangle} \Delta^{B_n \rangle D}
\end{aligned} \tag{14.35}$$

Wir verzichten hier darauf, diese beiden Identitäten in (14.29) zu verwenden. Die Gleichungen wurden für den Fall $r = 1$ erstmals von THORNE aufgestellt [49], dort sind sie vollständig angegeben.

Die Gleichungen (14.29) für $n = 0, 1, \dots, N$ sind äquivalent zu (14.27).

14.4 Das Abschlußproblem

Wir haben mit (14.27) bzw. (14.29) $(N+1)^2$ Gleichungen für die $(N+3)^2$ unabhängigen Elemente von $A_r^{A_1 A_2 \dots A_N B D}$, also für $M_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle}$, $n = 0, 1, \dots, N+2$.

Zum Abschluß der Gleichungssysteme benötigen wir Gleichungen für die Produktionen $\mathcal{P}_r^{A_1 \dots A_n}$ bzw. $P_r^{(A_1 \dots A_n)}$ sowie weitere $(4N + 8)$ Zustandsgleichungen.

Letztere erhalten wir, indem wir die spurfreien Momente mit den höchsten Indexzahlen zu Null setzen,

$$\begin{aligned} M_r^{(A_1 \dots A_N B)} &= 0 \\ M_r^{(A_1 \dots A_N B D)} &= 0 \end{aligned} \quad (14.36)$$

Da ein projizierter spurfreier Tensor n -ter Stufe $(2n + 1)$ unabhängige Elemente besitzt, haben wir hier gerade die gesuchte Zahl von Materialgleichungen gefunden.

Dieses Vorgehen entspricht unserer bisherigen Argumentation: Die spurfreien Momente mit hohen Indexzahlen n beschreiben einen hohen Grad der Anisotropie (im Ruhesystem). Wählen wir N groß genug, so ist die Anisotropie durch die Momente $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$, $n = 0, 1, \dots, N$ hinreichend beschrieben und höhere Momente können vernachlässigt werden.

Was bleibt ist die Berechnung der Produktionen. Die Produktionen $\mathcal{P}_r^{A_1 \dots A_n}$ können analog zu (14.24, 14.25) durch die Produktionen $P_r^{(B_1 \dots B_n)}$ dargestellt werden,

$$\mathcal{P}_r^{A_1 \dots A_n} = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{1}{c^{N-k}} P_r^{(A_1 \dots A_k U^{A_{k+1}} \dots U^{A_N})}. \quad (14.37)$$

$$P_r^{A_1 \dots A_n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,k} (-1)^k (\Delta^{A_1 A_2} \dots \Delta^{A_{2k-1} A_{2k}} P_r^{(A_{2k+1} \dots A_n)} + \dots (P_{nk} \text{ Terme})). \quad (14.38)$$

Unser Ziel ist jetzt die Bereitstellung von Gleichungen, die die $P_r^{(B_1 \dots B_n)}$ auf die $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$ zurückführen.

14.5 Entropie

Tatsächlich werden wir bei der Berechnung der Produktionen auf unsere bisherigen Ergebnisse zurückgreifen können. Daß dies so ist, zeigen wir, indem wir das Entropiemaximumprinzip kovariant formulieren.

Wir definieren den Entropie-4-Vektor gemäß

$$S^A = -k_{BC} \int p^A \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] dP. \quad (14.39)$$

Man beachte, daß bei der jetztigen Definition der Verteilungsfunktion gilt

$$y = \frac{2}{\hbar^3 (2\pi)^3} \quad (14.40)$$

Aus (14.39) erhalten wir mit der Strahlungs-Transport-Gleichung die kovariante Entropiebilanz

$$S^A{}_{;A} = \sigma \geq 0. \quad (14.41)$$

σ ist die (invariante) Entropieproduktion,

$$\sigma = -k_{BC} \int \ln \frac{1}{\frac{y}{f} + 1} \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR} dP. \quad (14.42)$$

$h = \frac{1}{c^2} S^A U_A$ ist die Entropiedichte im Ruhesystem. Das Entropiemaximumprinzip verlangt, daß h bei vorgegebenen Werten der $M_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle}$ ein Maximum annimmt. Wie zuvor machen wir uns von den Nebenbedingungen durch Lagrange-Multiplikatoren frei und haben dann den folgenden Ausdruck bezüglich f zu maximieren

$$\begin{aligned} & -k_B \int p_{LR}^0 \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] dP - \\ & - \sum_{r,n} \Lambda_{\langle A_1 \dots A_n \rangle}^r \left[\int (p_{LR}^0)^{r+1} L^{\langle A_1 \dots A_n \rangle} f dP - M_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle} \right] \end{aligned} \quad (14.43)$$

Es folgt für die maximierte Verteilungsfunktion

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1}, \quad \text{mit } \Xi = \sum_{r,n} \Lambda_{\langle A_1 \dots A_n \rangle}^r (p_{LR}^0)^r L^{\langle A_1 \dots A_n \rangle}. \quad (14.44)$$

f ist invariant, insbesondere können wir f im LR aufschreiben. Mit $p_{LR}^0 = \hbar k$, $L_{LR}^A = n_i$ folgt

$$\Xi = \sum_{r,n} \hbar^r \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} \quad (14.45)$$

Dies entspricht gerade unserem alten Ergebnis (5.11), wenn wir nur die Lagrange-Multiplikatoren durch $\hbar^r \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r$ ersetzen.

14.6 Produktionen

Aufgrund des letzten Ergebnisses können wir unsere bisherigen Ergebnisse für die Berechnung der Produktionen verwenden. Für die Produktionen im Ruhesystem erhalten wir eine Folge von Schlüssen:

$$\begin{aligned} \left(P_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} \right)_{LR} & \stackrel{(14.30)}{=} \left(\int (p_{LR}^0)^r L^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} \frac{p^0}{c} \mathcal{S} dP \right)_{LR} \\ & \stackrel{(14.13)}{=} \hbar^r \frac{1}{c} \int k^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} \frac{1}{c} \mathcal{S} d^3 p \\ & \stackrel{(4.6)}{=} \hbar^r \frac{1}{c} P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r \\ & \stackrel{(\text{Kap. 6.2})}{=} -\hbar^r \frac{1}{c} \sum_s \Theta_{rs} \left(u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^s - u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle | E}^s \right) \\ & \stackrel{(14.21)}{=} -\sum_s \hbar^{r-s} \frac{1}{c} \Theta_{rs} \left(M_s^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} - M_s^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} \Big|_E \right)_{LR} \end{aligned} \quad (14.46)$$

Die letzte Identität ist eine invariante Gleichung zwischen 4-Tensoren. Wir schließen

$$P_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} = - \sum_s \hbar^{r-s} \frac{1}{c} \Theta_{rs} (M_s^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} - M_s^{\langle B_1 \dots B_n \rangle|E}) \quad (14.47)$$

Aufgrund der Unterschiede zwischen Streu- und Absorptionsprozessen, für Streuung gilt $P_r = 0$, können wir für die Produktionen $\mathcal{P}_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ keine einfache zusammenfassende Formel schreiben. Falls jedoch Streuprozesse zu vernachlässigen sind gilt

$$\mathcal{P}_r^{A_1 A_2 \dots A_N} = - \sum_s \hbar^{r-s} \frac{1}{c} \Theta_{rs} (A_s^{A_1 A_2 \dots A_N} - A_s^{A_1 A_2 \dots A_N|E}). \quad (14.48)$$

Die Werte der Momente im Gleichgewicht, $M_s^{\langle B_1 \dots B_n \rangle|E}$, folgen aus (14.21, 5.19, 5.20) und der Neudefinition (14.40),

$$M_{r|E} = 4\pi y \left(\frac{k_B T}{c} \right)^{r+3} \Gamma(r+3) \zeta(r+3), \quad (14.49)$$

$$M_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle|E} = 0, \quad (14.50)$$

Mit (14.36, 14.47) haben wir die gesuchten Zustandsgleichungen gefunden. Damit sind die Gleichungssysteme (14.28) bzw. (14.29) geschlossen.

Wir haben also auch hier für die Gleichungen mit verschiedenem Index r eine Kopplung über die rechten Seiten, die Produktionen, vorliegen.

Wir werden die kovarianten Momentengleichungen in dieser Arbeit nicht weiter untersuchen. Für einen Beobachter im Ruhesystem reduzieren sie sich auf die von uns in den ersten Teilen dieser Arbeit untersuchten Gleichungen, falls die Materiegeschwindigkeit konstant in Zeit und Raum ist. Die Aussagen über die notwendige Zahl der Momente bleiben auch für die kovarianten Momentengleichungen bestehen.

14.7 Der Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten

Häufig ist die Geschwindigkeit der Materie für einen Beobachter im Laborsystem klein gegen die Lichtgeschwindigkeit. Wir wollen die Momentengleichungen für einen Beobachter im Laborsystem für diesen Fall aufstellen. Dabei vernachlässigen wir den Einfluß der Gravitation, haben also eine Lorentz-Transformation vom lokalen Ruhesystem in das Laborsystem vorzunehmen. Unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ gelten im Laborsystem

folgende Zusammenhänge:

$$U^A = \{c, v_i\} \quad (14.51)$$

$$U_A = \{c, -v_i\} \quad (14.52)$$

$$D\Psi = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + v_k \frac{\partial\Psi}{\partial x^k} \right) \quad (14.53)$$

$$\nabla_C \Psi = \left\{ \frac{v_k}{c} \frac{\partial\Psi}{\partial x^k}, \frac{\partial\Psi}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} v_i \frac{\partial\Psi}{\partial t} \right\} \quad (14.54)$$

$$\frac{1}{c} D U_A = \left\{ 0, -\frac{1}{c^2} \frac{\partial v_i}{\partial t} \right\} \quad (14.55)$$

$$\frac{1}{c} \nabla_C U_D = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0_j \\ 0_i & -\frac{1}{c} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \end{array} \right\} \quad (14.56)$$

Weiterhin sieht der Beobachter im Laborsystem den Vektor L^A als

$$L^A = \left\{ \frac{v_l}{c} n_l, n_k \right\} \quad (14.57)$$

wobei n_k den Richtungsvektor im Ruhesystem bezeichnet. Damit können die Momente für den Beobachter im Laborsystem durch die Momente im Ruhesystem dargestellt werden:

$$M_r^{(i_1 \dots i_n)} = \hbar^r u_{(i_1 \dots i_n)}^r \quad (14.58)$$

$$M_r^{(i_1 \dots i_n)k} = \hbar^r u_{(i_1 \dots i_n)k}^r \quad (14.59)$$

$$M_r^{(i_1 \dots i_n)0} = \hbar^r u_{(i_1 \dots i_n)k}^r \frac{v_k}{c} \quad (14.60)$$

$$M_r^{(i_1 \dots i_n)kl} = \hbar^r u_{(i_1 \dots i_n)kl}^r \quad (14.61)$$

$$M_r^{(i_1 \dots i_n)00} = \mathcal{O} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \quad (14.62)$$

Diese Darstellungen setzen wir in (14.29) ein, wobei wir nur die Raumkomponenten betrachten, also $B_k = i_k$ setzen. Es folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{(i_1 \dots i_n)}^r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_{(i_1 \dots i_n)}^r v_k + c u_{(i_1 \dots i_n)k}^r \right) + (r-n) u_{(i_1 \dots i_n)kl}^r \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + n \frac{\partial v_{(i_1} u_{i_2 \dots i_n)k}^r}{\partial x_k} \\ & + \frac{v_k}{c} \frac{\partial u_{(i_1 \dots i_n)k}^r}{\partial t} + (r+1-n) u_{(i_1 \dots i_n)k}^r \frac{1}{c} \frac{\partial v_k}{\partial t} + n \frac{1}{c} \frac{\partial v_{(i_1} u_{i_2 \dots i_n)}^r}{\partial t} \\ & = F_{(i_1 \dots i_n)}^r + \mathcal{O} \left(\frac{v^2}{c^2} \right). \end{aligned} \quad (14.63)$$

Die $u_{(i_1 \dots i_n)}^r$ sind die im lokalen Ruhesystem gemessenen Momente, die wir auch in den ersten Teilen dieser Arbeit verwendet haben. Unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\mathcal{O} \left(\frac{v}{c} \right)$

erhalten wir die in den ersten Teilen dieser Arbeit ausführlich diskutierten Gleichungen⁵,

$$\frac{\partial u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}^r}{\partial x_k} = P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r + \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right) \quad (14.64)$$

Durch einige elementare Umformungen erhält (14.63) Bilanzgleichungscharakter,

$$\frac{\partial m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{\partial t} + c \frac{\partial m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}}{\partial x_k} = p_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (14.65)$$

mit

$$\frac{1}{\hbar^r} m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle} = u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r + (r+1-n) u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}^r \frac{v_k}{c} + n \frac{v_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{c} u_{i_2 \dots i_n}^r \quad (14.66)$$

$$\frac{1}{\hbar^r} p_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle} = P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r + (r-n) P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}^r \frac{v_k}{c} + n \frac{v_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{c} P_{i_2 \dots i_n}^r \quad (14.67)$$

Die Bedeutung dieser Größen wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

14.8 Momente im Laborsystem

Durch die Wahl der Momente (14.16, 14.20) wurde das lokale Ruhesystem ausgezeichnet, da wir den 4-Impuls bezüglich dieses Systems zerlegt haben (14.10). Diese Auszeichnung rechtfertigt sich dadurch, daß die Produktionen (14.30) von größtmöglicher Einfachheit sind.

Allerdings hat man auch die Möglichkeit, durch die Wahl der Momente ein anderes System auszuzeichnen. Als Beispiel betrachten wir das Laborsystem (LS) mit der konstanten 4-Geschwindigkeit V^A . Den Impuls zerlegen wir gemäß

$$p^A = p_{LS}^0 \left(\frac{1}{c} V^A + N^A \right) \quad \text{mit} \quad p_{LS}^0 = \frac{p^A V_A}{c}, \quad N^A V_A = 0 \quad (14.68)$$

und wir definieren Momente und Produktionen durch

$$m_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle} = \int (p_{LS}^0)^{r+1} N^{\langle A_1 \dots A_n \rangle} f dP, \quad (14.69)$$

$$p_r^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} = \int (p_{LS}^0)^r N^{\langle B_1 \dots B_n \rangle} \left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR} dP. \quad (14.70)$$

Bei den Produktionen ist darauf zu achten, daß der Ausdruck $\left(\frac{p^0}{c} \mathcal{S} \right)_{LR}$ durch die Größen im Laborsystem dargestellt werden muß. Dies gelingt mit den Zusammenhängen

$$p_{LR}^0 = \frac{p^A U_A}{c} = \frac{p_{LS}^0}{c} \left(\frac{1}{c} V^A U_A + N^A U_A \right), \quad (14.71)$$

$$L^A = \frac{p^A}{p_{LR}^0} - \frac{1}{c} U^A = \frac{\frac{1}{c} V^A + N^A}{\frac{1}{c^2} V^A U_A + N^A \frac{1}{c} U_A} - \frac{1}{c} U^A. \quad (14.72)$$

⁵Diese erhalten wir natürlich auch aus (14.29), wenn $U^A = \text{const.}$ gilt und wir (14.29) für einen Beobachter im Ruhesystem formulieren.

Es ist deutlich, daß der Produktionsterm hiermit wesentlich komplizierter auszuwerten ist, insbesondere da im Nenner von (14.72) der Ausbreitungsvektor im Laborsystem, N^A , auftritt. Aus demselben Grund ist es nicht möglich, einen Zusammenhang zwischen den Momenten $M_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle}$ und $m_r^{\langle A_1 \dots A_n \rangle}$ zu finden.

Die Momentengleichungen ergeben sich wie vorher, wenn nur stets U^A durch V^A ersetzt wird. Insbesondere lauten sie für den Beobachter im Laborsystem ($V^A = \{c, 0, 0, 0\}$),

$$\frac{\partial m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{\partial t} + c \frac{\partial m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}}{\partial x_k} = p_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle}, \quad (14.73)$$

die Gleichungen mit Indizes $B_k = 0$ sind identisch erfüllt.

Nur für den Grenzfall kleiner Materiegeschwindigkeit können die $m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$, $p_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle}$ durch die Momente und Produktionen im lokalen Ruhesystem $u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r$, $P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r$ ausgedrückt werden. Es gilt für diesen Grenzfall

$$p_{LS}^0 = p_{LR}^0 \left(1 + \frac{v_l}{c} n_l \right) + \mathcal{O} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \quad (14.74)$$

$$N_{LS}^A = \left\{ 0, \frac{n_i + \frac{v_i}{c}}{1 + \frac{v_l}{c} n_l} \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \quad (14.75)$$

und aus (14.69, 14.70) folgt

$$\frac{1}{\hbar^r} m_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle} |_{LS} = u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r + (r+1-n) u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}^r \frac{v_k}{c} + n \frac{v_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{c} u_{i_2 \dots i_n}^r \quad (14.76)$$

$$\frac{1}{\hbar^r} p_r^{\langle i_1 \dots i_n \rangle} |_{LS} = P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r + (r-n) P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle k}^r \frac{v_k}{c} + n \frac{v_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}}{c} P_{i_2 \dots i_n}^r \quad (14.77)$$

Der Vergleich von (14.73, 14.76, 14.77) mit (14.65-14.67) zeigt die vollständige Übereinstimmung. Bei diesen Gleichungen handelt es sich also im Rahmen der Näherung um die Momentengleichungen für den Laborbeobachter. Interessant sind vor allem die Bilanzen von Energie cm_1 und Impuls m_1^i . Sie lauten zunächst, ausgedrückt durch die Meßgrößen im lokalen Ruhesystem (4.4, 4.6)⁶,

$$\frac{\partial}{\partial t} (e + 2p_k v_k) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(c^2 p_k + \frac{4}{3} e v_k + N_{\langle lk \rangle} v_l \right) = P_e + P_{p_k} v_k \quad (14.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p_i + \frac{4}{3} e \frac{v_i}{c^2} + N_{\langle ik \rangle} \frac{v_k}{c^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(N_{\langle ik \rangle} + \frac{1}{3} e \delta_{ik} + 2v_{\langle i} p_k \right) = P_{p_i} \quad (14.79)$$

⁶Zur Erinnerung: die Größen sind definiert wie folgt $e = \hbar c u^1$, $p_i = \hbar u_i^1$, $N_{\langle ij \rangle} = \hbar c u_{\langle ik \rangle}^1$, $P_e = \hbar c P^1$, $P_{p_i} = \hbar P_i^1$.

Die Produktion in der Impulsbilanz lautet eigentlich $\mathcal{P}_{p_i} = P_{p_i} + P_e v_i / c^2$. Der zweite Term ist jedoch vernachlässigbar. Zum Beweis bilden wir $\mathcal{P}_{p_i} v_i = P_{p_i} v_i + P_e v^2 / c^2$. Der Vergleich mit der Energieproduktion $\mathcal{P}_e = P_e + P_{p_i} v_i$ zeigt, daß dieser Term vernachlässigbar ist.

Die Wahl der Momente $A_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ bzw. $M_r^{(A_1 \dots A_n)}$ ist in der relativistischen kinetischen Theorie atomarer Gase nicht üblich. Hier verwendet man nur die Momente, siehe z.B. [11],

$$A_{N-1}^{A_1 A_2 \dots A_N} = \int p^{A_1} p^{A_2} \dots p^{A_N} f dP \quad (14.80)$$

Hier entfällt also die Auszeichnung eines bestimmten Beobachtersystems. Allerdings ist auch für atomare Gase das Ruhesystem von besonderer Bedeutung, z.B. wird die Temperatur dort gemessen.

Die Auswahl der Momente für die Strahlungstheorie ergab sich ganz von selbst aus dem Studium der Gleichungen im lokalen Ruhesystem der Materie. Die Güte der auf den Momenten $M_r^{A_1 \dots A_n}$ aufgebauten Theorie wurde in den ersten Teilen der vorliegenden Arbeit belegt.

Da die kinetische Theorie atomarer Gase dem gleichen Schema folgt, wäre es möglich, ja sogar naheliegend, die von uns für die Strahlung gewählten Momente $A_r^{A_1 A_2 \dots A_N}$ bzw. $M_r^{A_1 \dots A_n}$ in der Theorie atomarer Gase zu verwenden. Es wäre interessant die Implikationen dieser Wahl, insbesondere den Übergang zum klassischen Grenzfall, zu studieren⁷. In dieser Arbeit kann darauf jedoch nicht näher eingegangen werden.

14.9 Feldgleichungen für lokales Strahlungsgleichgewicht

Wir betrachten die Gleichungen (14.78, 14.79) für den Fall des lokalen Strahlungsgleichgewichtes. Dann dürfen wir auf den linken Seiten setzen $e = e_{|E} = aT^4$, $p_i = 0$, $N_{(lk)} = 0$ und erhalten

$$\frac{\partial e_{|E}}{\partial t} + \frac{4}{3} \frac{\partial e_{|E} v_k}{\partial x_k} = P_e + P_{p_k} v_k \quad (14.81)$$

$$\frac{4}{3} \frac{1}{c^2} \frac{\partial e_{|E} v_i}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial e_{|E}}{\partial x_i} = P_{p_i} \quad (14.82)$$

In der zweiten Gleichung können wir den Ausdruck $\frac{4}{3} \frac{1}{c^2} \frac{\partial e_{|E} v_i}{\partial t}$ als klein vernachlässigen,

$$\frac{1}{3} \frac{\partial e_{|E}}{\partial x_i} = P_{p_i}, \quad (14.83)$$

die Impulsproduktion ist gleich dem Gradienten des Strahlungsdruckes. Mit dieser Gleichung erhalten wir aus (14.81) für die Energieproduktion

$$\frac{\partial e_{|E}}{\partial t} + \frac{\partial e_{|E} v_k}{\partial x_k} + \frac{e_{|E}}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = P_e = -r \quad (14.84)$$

⁷Es sei darauf hingewiesen, daß für die Photonen ein klassischer Grenzfall nicht existiert, da diese sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Wir hatten den Grenzfall kleiner *Materiegeschwindigkeit* als klassischen Grenzfall bezeichnet.

Wir erinnern die klassischen Gleichungen für die Materie (3.1, 3.2, 3.3),

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (14.85)$$

$$\frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_i v_k - t_{ik}}{\partial x_k} = \varrho f_i - P_{pi}, \quad (14.86)$$

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u v_k + q_k}{\partial x_k} = t_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - P_e. \quad (14.87)$$

Die Eliminierung von r und P_{pi} liefert die Gleichungen für den Fall des lokalen Strahlungsgleichgewichtes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_k}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \varrho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \varrho v_i v_k - t_{ik} + \frac{1}{3} e_{|E} \delta_{ik}}{\partial x_k} &= \varrho f_i, \\ \frac{\partial \varrho u + e_{|E}}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u + e_{|E}) v_k + q_k}{\partial x_k} &= \left(t_{ik} - \frac{1}{3} e_{|E} \delta_{ik} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (14.88)$$

Zusammen mit den Materialgleichungen für $u(\varrho, T)$, q_i , t_{ij} und mit $e_{|E} = aT^4$ ist dies ein geschlossenes Feldgleichungssystem für die Variablen ϱ , v_i , T .

Kapitel 15

Die nichtlineare 4-Feld-Theorie

Neben der in dieser Arbeit vorgestellten Momentenmethode mit einer großen Zahl von Momenten wurden in den letzten Jahren neue Theorien entwickelt, die nur die Momentengleichungen für Energie und Impuls in Betracht ziehen, also die Gleichungen (4.7, 4.8)

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c^2 \frac{\partial p_k}{\partial x_k} = P_e, \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial N_{ik}}{\partial x_k} = P_{p_i}. \quad (15.2)$$

In diesen neueren Theorien werden für den Photonen-Drucktensor N_{ik} auf verschiedenem Wege nichtlineare Materialgleichungen $N_{ik}(e, p_i)$ bestimmt, mit dem Ziel, die Strahlung im Nichtgleichgewicht zu beschreiben [25][30][31].

In diesem Kapitel wollen wir uns mit einer auf dem Entropiemaximumprinzip beruhenden Theorie kritisch auseinandersetzen. Die Gleichungen dieser Theorie wurden erstmalig von LARECKI in der kinetischen Theorie der Phononen abgeleitet [29]. Andere Autoren konnten die Gleichungen aus der phänomenologischen Erweiterten Thermodynamik gewinnen [3][28][37]. Sie lassen sich aber auch aus einigen Betrachtungen im Rahmen der Relativitätstheorie gewinnen. Aus diesem Grunde können wir sie erst an dieser Stelle diskutieren.

Wir werden die Gleichungen auf zwei verschiedenen Wegen ableiten und sie kritisch diskutieren. Dabei beschränken wir uns auf die Berechnung von N_{ik} , die Produktionen betrachten wir an dieser Stelle nicht.

15.1 Der Eddington-Faktor

Das Ziel ist es, eine Materialgleichung für den Drucktensor

$$N_{ik} = \int \hbar c k n_i n_k f d\mathbf{k} \quad (15.3)$$

als Funktion von den Variablen

$$e = \int \hbar c k f d\mathbf{k} \quad (15.4)$$

$$p_i = \int \hbar k n_i f d\mathbf{k} \quad (15.5)$$

zu berechnen. Aus Darstellungssätzen folgt, daß N_{ik} von der Form

$$N_{ik} = b_1(e, p^2) \delta_{ik} + b_2(e, p^2) p_i p_k \quad (15.6)$$

sein muß. Wegen $N_{kk} = e$ sind die Koeffizienten b_1 und b_2 nicht voneinander unabhängig, es muß gelten

$$b_2 = \frac{e - 3b_1}{p^2}. \quad (15.7)$$

Der Eddington-Faktor $\chi(e, p^2)$ wird definiert durch

$$\frac{b_1}{e} = \frac{1 - \chi}{2} \quad (15.8)$$

und es folgt die Darstellung des Drucktensors

$$N_{ik} = e \left(\frac{1 - \chi}{2} \delta_{ik} + \frac{3\chi - 1}{2} \frac{p_i p_k}{p^2} \right). \quad (15.9)$$

Die Bestimmung der Materialgleichung für N_{ik} verlangt also die Berechnung des Eddington-Faktors. Für isotrope Strahlung muß offenbar gelten $\chi = 1/3$.

15.2 Entropiemaximumprinzip

Wir können N_{ik} in der gewünschten Weise berechnen, wenn wir nur die Verteilungsfunktion in der Form $f(e(x_i, t), p_i(x_i, t), k_i)$ kennen. Diese erhalten wir aus dem Entropiemaximumprinzip durch Maximierung der Entropiedichte unter vorgegebenen Werten von e und p_k . Von den Nebenbedingungen machen wir uns wieder mittels Lagrange-Multiplikatoren Λ_e und Λ_{p_i} frei und maximieren den Ausdruck

$$-k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k} - \Lambda_e \left(\int \hbar c k f d\mathbf{k} - e \right) - \Lambda_{p_i} \left(\int \hbar k n_i f d\mathbf{k} - p_i \right) \quad (15.10)$$

bezüglich f ohne Nebenbedingungen. Die gesuchte Verteilungsfunktion ergibt sich zu

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi = \frac{\hbar ck}{k_B} \left(\Lambda_e + \frac{1}{c} \Lambda_{p_i} n_i \right). \quad (15.11)$$

Aus (15.4, 15.5) folgt mit dieser Verteilungsfunktion ein Zusammenhang zwischen den Variablen und den Lagrangemultiplikatoren (a ist die Strahlungskonstante)

$$e = a \frac{3\Lambda_e^2 + \frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2}{\left(\Lambda_e^2 - \frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2\right)^3}, \quad (15.12)$$

$$p_i = -a \frac{4}{3} \frac{\Lambda_e \frac{1}{c} \Lambda_{p_i}}{\left(\Lambda_e^2 - \frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2\right)^3}. \quad (15.13)$$

Aus (15.3, 15.11) folgt der Eddington-Faktor als Funktion der Lagrange-Multiplikatoren,

$$\chi = \frac{\Lambda_e^2 + 3\frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2}{3\Lambda_e^2 + \frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2}. \quad (15.14)$$

Für die Diskussion benötigen wir auch die Entropie. Sie lautet, ausgedrückt in den Lagrange-Multiplikatoren (vergl. 5.32),

$$h = \frac{4}{3} (\Lambda_e e + \Lambda_{p_i} p_i) = \frac{4}{3} a \frac{\Lambda_e}{\left(\Lambda_e^2 - \frac{1}{c^2}\Lambda_{p_i}^2\right)^2}. \quad (15.15)$$

Jetzt müssen aus den letzten vier Gleichungen die Lagrange-Multiplikatoren eliminiert werden. Man überprüft leicht, daß für den Eddington-Faktor gelten muß

$$\chi = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \frac{c^2 p^2}{e^2}}, \quad (15.16)$$

die Entropie ergibt sich zu

$$h = \frac{4}{3} \left(\frac{a}{e}\right)^{1/4} e \frac{3^{3/4}}{27^{1/4}} (3 - \chi)^{1/2} (1 - \chi)^{1/4}. \quad (15.17)$$

15.3 Diskussion

Der betrachteten Theorie schreiben die Autoren die Fähigkeit zu, das gesamte Verhalten der Strahlung zwischen Gleichgewicht und Freistrahler zu beschreiben. Wir wollen die beiden Grenzfälle betrachten.

Im Gleichgewicht gilt $p_i = 0$; dann gilt $\chi = 1/3$ und die Materialgleichung für den Drucktensor reduziert sich auf das bekannte Ergebnis

$$N_{ik} = \frac{e}{3} \delta_{ik}. \quad (15.18)$$

Für die Entropie im Gleichgewicht erhalten wir mit $e = aT^4$

$$h = \frac{4}{3} \left(\frac{a}{e} \right)^{1/4} e = \frac{4}{3} a T^3, \quad (15.19)$$

auch dieses Ergebnis ist uns bekannt.

Für den Freistrahл hingegen gilt $cp_i = en_i$, wo n_i der allen Photonen gemeinsame Richtungsvektor ist. Dann gilt $\chi = 1$ und

$$N_{ik} = en_i n_k. \quad (15.20)$$

Da die Produktionen für einen Freistrahл verschwinden müssen, reduzieren sich Energie und Impulsbilanz auf eine Gleichung

$$\frac{\partial e}{\partial t} + c \frac{\partial en_k}{\partial x_k} = 0, \quad (15.21)$$

die in der Tat die Ausbreitung der Energie in Richtung n_i mit Lichtgeschwindigkeit beschreibt. Die Entropie des Freistrahles allerdings ergibt sich zu

$$h = 0. \quad (15.22)$$

Dieses Resultat steht im Widerspruch zu unserem Ergebnis für die Entropie eines Sonnenstrahles (10.9), die nicht verschwindet,

$$h = \frac{4}{3} \frac{e}{T_\odot}. \quad (15.23)$$

Die vorgestellte Theorie ist also nicht in der Lage einen Sonnenstrahl zu beschreiben. Es bleibt die Frage, was für ein Freistrahл es ist, den die Theorie beschreibt.

15.4 Relativistische Betrachtung

Die folgende Betrachtung geht auf eine Bemerkung von LEVERMORE zurück, der bemerkt, daß der oben berechnete Eddington-Faktor sich ergibt, wenn die Strahlung in einem Beobachtersystem isotrop ist [30]. Wir betrachten den Energie-Impuls-Tensor der Strahlung

$$T^{AB} = c \int p^A p^B f dP, \quad \text{mit } T^A_A = 0. \quad (15.24)$$

Diesen zerlegen wir mit zwei verschiedenen Beobachtergeschwindigkeiten U^A, V^A gemäß

$$T^{AB} = \frac{e}{c^2} U^A U^B + \frac{1}{c} (F^A U^B + F^B U^A) + P_U^{AB} \quad (15.25)$$

$$T^{AB} = \frac{E}{c^2} V^A V^B + P_V^{AB} \quad (15.26)$$

mit

$$F^A U_A = 0, \quad P_U^{AB} U_B = 0, \quad P_V^{AB} V_B = 0 \quad (15.27)$$

Die Bedeutung der Größen ist wie folgt: e bzw. E sind die Energiedichten, die ein sich mit U^A bzw. V^A bewegender Beobachter mißt, P_U^{AB} und P_V^{AB} sind die Drucktensoren, die diese Beobachter wahrnehmen. $\frac{1}{c}F^A$ ist die vom Beobachter U^A gemessene Photonen-Impulsdichte, während sich der Beobachter V^A gerade so bewegen soll, daß er keinen Impuls mißt (Landau-Lifschitz-Geschwindigkeit [23]).

Wir suchen nun Materialgleichungen für die Drucktensoren in der Form

$$P_U^{AB}(e, F^C, U^C), \quad P_V^{AB}(E, 0, V^C) \quad (15.28)$$

Unter Berücksichtigung von (15.24)₂ und (15.27) zeigt man, daß gelten muß

$$P_U^{AB} = e \left(\frac{\chi - 1}{2} \Delta^{AB} - \frac{3\chi - 1}{2} \frac{F^A F^B}{F^C F_C} \right) \quad (15.29)$$

$$P_V^{AB} = -\frac{E}{3} \Delta_V^{AB} \quad (15.30)$$

Der Eddington-Faktor in (15.29) ist eine Funktion der Invarianten $e, F^A F_A$. Die Projektoren sind definiert gemäß

$$\Delta^{AB} = g^{AB} - \frac{1}{c^2} U^A U^B, \quad \Delta_V^{AB} = g^{AB} - \frac{1}{c^2} V^A V^B \quad (15.31)$$

Für den Beobachter, für den gilt $U^A = \{c, 0, 0, 0\}$, reduziert sich (15.29) auf die Gleichung (15.9), wenn man setzt $(P_U^{ij})_{LRU} = N_{ij}$ und beachtet, daß gilt $(\Delta^{ij})_{LRU} = -\delta_{ij}, (F_U^i)_{LRU} = cp_i, F^C F_C = -c^2 p^2$.

Mit (15.25, 15.29) bzw. (15.26, 15.30) haben wir zwei Darstellungen für den Energie-Impuls-Tensor gefunden. Gleichsetzen erlaubt die Berechnung des Eddington-Faktors. Mit der Abkürzung

$$\Upsilon = \frac{1}{c^2} V^A U_A \quad (15.32)$$

ergeben sich durch Multiplikation von T^{AB} mit $\frac{1}{c^2} U_A U_B$ bzw. $\Delta^C_B \frac{1}{c^2} U_A$ und Gleichsetzen der Ausdrücke die Zusammenhänge

$$e = \frac{E}{3} (4\Upsilon^2 - 1) \quad (15.33)$$

$$F^C = \frac{4}{3} E \Upsilon \left(\frac{1}{c} V^C - \Upsilon \frac{1}{c} U^C \right) \quad (15.34)$$

$$\frac{F^C F_C}{e^2} = \frac{16\Upsilon^2 (1 - \Upsilon^2)}{(4\Upsilon^2 - 1)^2} \quad (15.35)$$

Multiplikation von T^{AB} mit $F_A F_B$ liefert unter Verwendung der letzten Beziehungen den Eddington-Faktor als

$$\chi = \frac{4\Upsilon^2 - 3}{4\Upsilon^2 - 1}. \quad (15.36)$$

Mit (15.35) zeigt man leicht, daß dieser dann lautet

$$\chi = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \sqrt{1 + \frac{3 F^C F_C}{4 e^2}}, \quad (15.37)$$

das stimmt mit (15.16) überein. Für die Diskussion benötigen wir noch zwei weitere Zusammenhänge,

$$E = \frac{3}{2} e (1 - \chi) \quad (15.38)$$

$$V^C = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (U^C + c\beta L^C) \quad (15.39)$$

dabei wurde definiert

$$\beta = \sqrt{\frac{3\chi - 1}{3 - \chi}} \quad (15.40)$$

$$F^C = \sqrt{-F^D F_D} L^C \quad (15.41)$$

Der Vektor L^C gibt die Richtung des Impulses an. Für den Beobachter mit $U^A = \{c, 0, 0, 0\}^A$ gilt $L^C = \{0, p_i/\sqrt{p_k p_k}\}^C = \{0, l_i\}^C$, für ihn gilt

$$V^C = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \{c, c\beta l_i\}^C \quad (15.42)$$

15.5 Kritik

Mit den Betrachtungen des letzten Abschnittes haben wir also dasselbe Ergebnis erhalten wie mit dem Entropiemaximumprinzip. Da es keine Rolle spielen darf, bezüglich welchem Beobachter der Energie-Impuls-Tensor zerlegt wird, ist diese Form des Eddington-Faktors zwingend, wenn der Drucktensor nur von der im Beobachtersystem gemessenen Energie, dem dort gemessenen Impuls und der 4-Geschwindigkeit des Beobachters abhängen soll. Insbesondere gibt es dann ein System, in dem der Drucktensor isotrop ist, nämlich das mit der 4-Geschwindigkeit V^A , in dem der Impuls verschwindet.

Ein anderes Ergebnis ist also nur zu erwarten, wenn der Variablensatz erweitert wird oder mehr Momente in die Theorie einbezogen werden.

Nach (15.42) bewegt sich das System V^A (isotroper Drucktensor) gegen den Beobachter U^A mit der Geschwindigkeit

$$v_i = c\beta l_i = c \sqrt{\frac{3\chi - 1}{3 - \chi}} l_i. \quad (15.43)$$

Unter Verwendung der Formel für den relativistischen Doppler-Effekt (H.27) läßt sich zeigen, daß die Verteilungsfunktion (15.11) ausgedrückt durch die Größen im System V^A lautet

$$f = \frac{y}{\exp \Xi - 1} \quad \text{mit} \quad \Xi = \frac{\hbar c k_V}{k_B} \left(\frac{a}{E} \right)^{1/4}, \quad (15.44)$$

sie hat also die Form der Planck-Verteilung; insbesondere ist sie isotrop.

Wir fragen nach der Bedeutung der Bedingung für einen Freistrah, $\chi = 1$. Aus (15.40) folgt dann $\beta = 1$, und wir schließen aus (15.43), daß sich der Beobachter U^A gegen das System V^A mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Nach (15.38) wird die Energie e des Freistrahls unendlich groß, wenn die Energie E im System V^A nicht verschwindet.

Wie haben wir diese Ergebnisse zu interpretieren? Der Schlüssel liegt in der Anwendung des Entropiemaximumprinzips (bzw. des Entropieprinzips der Erweiterten Thermodynamik). Damit die Entropie maximal werden kann, muß es einen Mechanismus geben, der es der Strahlung gestattet, viele Zustände "auszuprobieren", und sich den günstigsten, also den Zustand maximaler Entropie, "auszuwählen". Der einzige Mechanismus, der dies gestattet, ist die Wechselwirkung mit Materie; in einem Freistrah kann sich der Zustand der Strahlung nicht ändern. Nur durch diese Wechselwirkung kann sich im Ruhesystem der Materie eine isotrope Verteilung einstellen.

Wir haben also das Beobachtersystem V^A als das Ruhesystem der Materie zu interpretieren, und *nicht*, wie es die zitierten Autoren suggerieren, das Beobachtersystem U^A . Die Annahme, daß U^A die Materiegeschwindigkeit ist, ist physikalisch unsinnig. Damit werden Arbeiten, die die nichtlinearen Effekte des Eddington-Faktors aufgrund dieser falschen Annahme untersuchen, fragwürdig, z.B. [1].

Es folgt, daß die präsentierte Theorie nur gültig ist, wenn im Ruhesystem der Materie lokales Gleichgewicht herrscht, denn nur dann kann die Verteilung von der einfachen Form (15.44) sein. Ein sich mit Lichtgeschwindigkeit gegen die Materie bewegender Beobachter (den es nicht geben kann) sähe die Gleichgewichtsstrahlung als Folge der Aberration (H.28) als Freistrah. Als Folge des Doppler-Effektes (H.27) würde er den Photonen eine unendliche Frequenz zuordnen.

Lokales Nichtgleichgewicht, insbesondere Freistrahlen, kann, wie in dieser Arbeit gezeigt wurde, nur durch eine große Zahl von Momenten beschrieben werden.

Anhang

Anhang A

Entropie und Entropiebilanz

A.1 Statistische Definition der Entropie

Nach BOLTZMANNNS statistischer Definition der Entropie gilt

$$S = k_B \ln W. \quad (\text{A.1})$$

S ist die gesamte in einem Körper enthaltene Entropie, $k_B = 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ist die Boltzmann-Konstante und W ist die Zahl der Realisierungsmöglichkeiten des durch die Verteilungsfunktion f gegebenen Zustandes. W muß aus der Kenntnis von f bestimmt werden.

Wir gehen vor wie folgt: Der von x_i und k_i aufgespannte Phasenraum wird in M Zellen Ξ_s der Größe $d\mathbf{x} d\mathbf{k}$ aufgeteilt, die geeignet durchnummeriert werden. In jeder dieser Phasenraumzellen gibt es $\chi_s = y d\mathbf{x} d\mathbf{k}$ Plätze ($s = 1, \dots, M$), auf für die Photonen. Der Proportionalitätsfaktor y ist also das Inverse desjenigen Phasenraumvolumens, das genau *einen* dieser Plätze enthält. Die Zahl von Photonen in der Zelle Ξ_s wird mit N_s bezeichnet und es gilt $N_s = f d\mathbf{x} d\mathbf{k}$.

Die Quantenmechanik lehrt uns, daß es sich bei Photonen um Bosonen handelt [17], also um Teilchen, von denen beliebig viele auf einem Platz sitzen können. Bosonen sind ununterscheidbar, d.h. wenn zwei Bosonen vertauscht werden, ändert sich der Zustand des Bosonengases nicht.

Um W zu berechnen, fragen wir zunächst nach der Zahl der Möglichkeiten, N_s ununterscheidbare Teilchen auf die χ_s Plätze der Zelle Ξ_s zu verteilen. Äquivalent dazu ist die Frage, wieviele Möglichkeiten es gibt, N_s Teilchen durch $\chi_s - 1$ Wände zu trennen oder, anders gestellt, auf wieviele Weisen $\chi_s + N_s - 1$ Elemente (Teilchen und Wände) angeordnet werden können, wenn χ_s bzw. N_s von ihnen ununterscheidbar sind [38]. Die Antwort liefert die Kombinatorik: In

der Zelle Ξ_s gibt es

$$\frac{(\chi_s + N_s - 1)!}{(\chi_s - 1)!N_s!}$$

Möglichkeiten. Die gesuchte Zahl W ergibt sich aus dem Produkt über alle Zellen,

$$W = \prod_s \frac{(\chi_s + N_s - 1)!}{(\chi_s - 1)!N_s!}. \quad (\text{A.2})$$

Unter Zuhilfenahme der Stirlingformel $\ln N! \approx N \ln N - N$ folgt damit für die Entropie

$$S = -k_B \sum (\chi_s - 1) \left[\frac{N_s}{\chi_s - 1} \ln \frac{N_s}{\chi_s - 1} - \left(1 + \frac{N_s}{\chi_s - 1} \right) \ln \left(1 + \frac{N_s}{\chi_s - 1} \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Unter der Annahme, daß jede Zelle sehr viele Plätze enthält, $\chi_s \gg 1$, sowie mit $\chi_s = y \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{k}$ und $N_s = f \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{k}$ erhalten wir, indem wir die Summe in ein Integral umwandeln,

$$S = -k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{x} \, d\mathbf{k}. \quad (\text{A.4})$$

Daraus ergibt sich die Entropiedichte der Strahlung als

$$h = -k_B \int \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k}. \quad (\text{A.5})$$

Die Größe y ergibt sich aus der Quantenmechanik zu $1/(2\pi)^3$ für jede Polarisationsrichtung. Es gibt nur transversale Strahlung, die durch zwei Polarisationsrichtungen beschrieben werden kann. Wir betrachten nur unpolarisierte Strahlung, unterscheiden also keine Polarisationsrichtungen, und können setzen

$$y = \frac{2}{(2\pi)^3}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Die Entropiebilanz

Indem wir $\partial h/\partial t$ bilden und $\partial f/\partial t$ mittels der Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35) eliminieren, kommen wir zur Entropiebilanz [39][44]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} = \sigma. \quad (\text{A.7})$$

Die neuen Formelzeichen stehen für den Entropiefluß

$$\phi_k = -k_B c \int n_k \left[f \ln \frac{f}{y} - (y + f) \ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) \right] d\mathbf{k} \quad (\text{A.8})$$

und die Entropieproduktion

$$\sigma = k_B \int \left[\ln \left(1 + \frac{f}{y} \right) - \ln \frac{f}{y} \right] \mathcal{S} \, d\mathbf{k}. \quad (\text{A.9})$$

Anhang B

Absorption und Emission in Gasen

B.1 Verteilungsfunktion des Gases

Wir betrachten die Absorption und Emission von Linienspektren in Gasen. Um die Beschreibung des Gases nicht unnötig zu komplizieren, betrachten wir ein einatomiges ideales Gas. Die Atome dieses Gases können in verschiedenen Quantenzuständen vorliegen, die wir durch ihre Energien E_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, charakterisieren.

Die Verteilungsfunktion des Gases definieren wir wie folgt: Es ist

$$F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C} dx \quad (\text{B.1})$$

die Zahldichte von Gasatomen im Quantenzustand ν mit Geschwindigkeiten aus dem Intervall $(C_i, C_i + dC_i)$, die sich zur Zeit t im Ortsintervall $(x_i, x_i + dx_i)$ befinden. C_i ist die Geschwindigkeit eines Atoms gemessen aus dem Schwerpunktsystem des Gases. Die Masse eines Atoms wird mit m bezeichnet.

Mittels der Verteilungsfunktion lassen sich die folgenden Mittelwerte definieren:

Partialzahldichte der Teilchen im Quantenzustand der Energie E_ν :

$$n_{E_\nu}(x_i, t) = \int F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C}, \quad (\text{B.2})$$

Gesamtzahldichte:

$$n(x_i, t) = \sum_\nu n_{E_\nu}(x_i, t) = \sum_\nu \int F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C}, \quad (\text{B.3})$$

Partial und Gesamtmassendichte:

$$\varrho_\nu(x_i, t) = m n_{E_\nu}(x_i, t) \quad , \quad \varrho(x_i, t) = m n(x_i, t), \quad (\text{B.4})$$

Dichte der thermischen Energie:

$$\varrho u(x_i, t) = \sum_\nu \int \frac{m}{2} C^2 F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C}, \quad (\text{B.5})$$

Dichte der Quantenenergie:

$$\varrho \hat{u}(x_i, t) = \sum_\nu E_\nu n_{E_\nu}(x_i, t) = \sum_\nu E_\nu \int F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C}. \quad (\text{B.6})$$

Zudem gilt

$$0 = \sum_\nu \int m C_i F_\nu(x_i, t, C_i) d\mathbf{C}. \quad (\text{B.7})$$

Der Integrationsbereich ist jeweils der gesamte Geschwindigkeitsraum.

Die Temperatur des Gases ist definiert durch die kalorische Zustandsgleichung

$$u(x_i, t) = \frac{3}{2} \frac{k_B}{m} T(x_i, t). \quad (\text{B.8})$$

Im thermischen Gleichgewicht stellt sich die Verteilungsfunktion als die Maxwell-Boltzmann-Verteilung heraus,

$$F_\nu^E = n_{E_\nu}^E \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}^3 e^{-\frac{m}{2k_B T} C^2}, \quad (\text{B.9})$$

mit der Partialzahldichte im Gleichgewicht

$$n_{E_\nu}^E = n e^{-\frac{E_\nu}{k_B T}}, \quad (\text{B.10})$$

n ist die Gesamtzahldichte (B.2).

B.2 Absorption, spontane und erzwungene Emission

Betrachten wir zunächst ein einziges Atom. Damit es seinen Quantenzustand vom Zustand ν zum Zustand ν' ändern kann, muß ihm die Energie

$$\Delta E_{\nu \rightarrow \nu'} = E_{\nu'} - E_\nu \quad (\text{B.11})$$

zugeführt bzw. entzogen werden. Das geschieht durch die Absorption bzw. Emission eines Photons dieser Energie, folglich durch ein Photon der Frequenz

$$\bar{\omega} = c\bar{k} = \frac{\Delta E_{\nu \rightarrow \nu'}}{\hbar}. \quad (\text{B.12})$$

Der Querstrich bezieht sich darauf, daß $\bar{\omega}$ die Frequenz ist, die im Ruhesystem des Atoms gemessen wird. Im Ruhesystem des Teilchens definieren wir jetzt atomare Emissions- und Absorptionswahrscheinlichkeiten.

Wir beginnen mit der spontanen Emission, einem Vorgang, bei dem ein angeregtes Atom plötzlich in einen Zustand niedrigerer Energie übergeht – unter Emission eines Photons. Die Größe

$$A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} d\bar{\mathbf{k}} dt, \quad (\text{B.13})$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß das Atom während des Zeitintervalls dt ein Photon mit Wellenvektoren aus $(\bar{k}_i, \bar{k}_i + d\bar{k}_i)$ spontan emittiert. Also ist

$$A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} d\bar{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.14})$$

die Zahl der pro Zeiteinheit von einem Atom emittierten Photonen.

Das Atom "sieht" eine Photonverteilung $\bar{f} d\bar{\mathbf{k}}$. Die Zahl der pro Zeiteinheit absorbierten Photonen mit Wellenvektoren aus $(\bar{k}_i, \bar{k}_i + d\bar{k}_i)$ ist gegeben durch

$$B_{E_\nu}^{E_\nu + \hbar c \bar{k}} \bar{f} d\bar{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.15})$$

Neben diesen beiden Effekten gibt es noch einen dritten, den der stimulierten Emission. Sie wurde von Einstein postuliert, um auf einfache Weise die Planck-Verteilung begründen zu können. Bei der stimulierten Emission wird das Atom von einem Photon getroffen, und emittiert ein genau gleichartiges. Wir definieren die Größe

$$B_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} \bar{f} d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{B.16})$$

als die Zahl der von dem Atom pro Zeiteinheit durch diesen Effekt erzeugten Photonen.

Insgesamt erzeugt das Atom pro Zeiteinheit

$$\left(A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} + \left(B_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} - B_{E_\nu}^{E_\nu + \hbar c \bar{k}} \right) \bar{f} \right) d\bar{\mathbf{k}} \quad (\text{B.17})$$

Photonen mit Wellenvektoren aus $(\bar{k}_i, \bar{k}_i + d\bar{k}_i)$.

Die Funktionen $A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}}$, $B_{E_\nu}^{E_\nu + \hbar c \bar{k}}$ und $B_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}}$ sind rein atomare Größen, hängen also nicht von irgendwelchen makroskopischen Größen wie Dichte oder Temperatur ab; zudem sind sie richtungsunabhängig, der Wellenvektor geht nur über seinen Betrag \bar{k} ein.

(B.17) ist die Photonproduktion, wie sie ein Beobachter auf dem Teilchen wahrnimmt. Ein Beobachter im Schwerpunktsystem des Gases sieht das Teilchen jedoch mit der Geschwindigkeit C_i , wird also aufgrund des Doppler-Effektes andere Frequenzen wahrnehmen.

Sei k die Wellenzahl im Laborsystem, dann gelten folgende Transformationsregeln (Anhang H)

$$\bar{f} = f \quad (\text{B.18})$$

$$d\bar{\mathbf{k}} = \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{k}. \quad (\text{B.19})$$

Das Atom im Quantenzustand ν mit der Geschwindigkeit C_i erzeugt für den Beobachter im Schwerpunktsystem pro Zeiteinheit

$$\left(A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} + \left(B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} - B_{a E_\nu}^{E_\nu + \hbar c \bar{k}} \right) f \right) \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{k} \quad (\text{B.20})$$

Photonen mit Wellenvektoren aus $(k_i, k_i + dk_i)$; dabei ist noch \bar{k} nach (H.27) zu ersetzen.

Es gibt $F_\nu d\mathbf{C} d\mathbf{x}$ solcher Atome am Ort x_i , d.h. es werden insgesamt am Ort x_i pro Zeiteinheit

$$\sum_\nu \int \left(A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} + \left(B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} - B_{a E_\nu}^{E_\nu + \hbar c \bar{k}} \right) f \right) \frac{\bar{k}}{k} F_\nu d\mathbf{C} d\mathbf{x} d\mathbf{k}. \quad (\text{B.21})$$

Photonen produziert.

Die Strahlungs-Transport-Gleichung lautet (1.35)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + cn_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = \mathcal{S}. \quad (\text{B.22})$$

Dabei war $\mathcal{S} d\mathbf{x} d\mathbf{k}$ die Zahl der am Ort x_i pro Zeiteinheit produzierten Photonen mit Wellenvektoren aus $(k_i, k_i + dk_i)$, ist also gleich (B.21). Nach einer leichten Umsummierung erhalten wir

$$\mathcal{S} = \sum_\nu \int \left(F_\nu \left(A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} + B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} f \right) - F_{\nu - \hbar c \bar{k}} B_{a E_\nu - \hbar c \bar{k}}^{E_\nu} f \right) \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{C}. \quad (\text{B.23})$$

Die Form (B.23) hat den Vorteil, daß im Integranden nur Ausdrücke stehen, die Übergänge zwischen den Quantenzuständen E_ν und $E_\nu - \hbar c \bar{k}$ beschreiben. In den folgenden Abschnitten werden wir uns damit beschäftigen, diesen Ausdruck zu vereinfachen.

B.3 Gleichgewicht: Einstein-Koeffizienten

Im thermischen Gleichgewicht zwischen Gas und Strahlung muß gelten $\mathcal{S} = 0$, sowie $F_\nu = F_\nu^E$ und $f = f_{|E}$. Wir erinnern (B.9) und definieren mittlere Absorptions- und Emissionskoeffizien-

ten durch

$$A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) = \frac{1}{n_{E_\nu}^E} \int F_\nu^E A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{C}, \quad (\text{B.24})$$

$$B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) = \frac{1}{n_{E_\nu}^E} \int F_\nu^E B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar c \bar{k}} \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{C}, \quad (\text{B.25})$$

$$B_{a E_\nu - \hbar ck}^{E_\nu}(k, T) = \frac{1}{n_{E_\nu - \hbar ck}^E} \int F_{\nu - \hbar c \bar{k}}^E B_{a E_\nu - \hbar c \bar{k}}^{E_\nu} \frac{\bar{k}}{k} d\mathbf{C}. \quad (\text{B.26})$$

Die so definierten Koeffizienten sind die üblicherweise in der Literatur zu findenden Einstein-Koeffizienten.

Man überlegt sich leicht, daß die Einstein-Koeffizienten aufgrund der Isotropie von F_ν^E bezüglich C_i auch isotrop bezüglich k_i sein müssen, also nur von k abhängen können.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$0 = \sum_\nu \left(n_{E_\nu}^E \left(A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) + B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) f_{|E} \right) - n_{E_\nu - \hbar ck}^E B_{a E_\nu - \hbar ck}^{E_\nu}(k, T) f_{|E} \right). \quad (\text{B.27})$$

Unter der Annahme, daß im Gleichgewicht jeder Übergang $E_\nu \longleftrightarrow E_\nu - \hbar ck$ in jede Richtung gleich oft stattfindet, muß jeder Summand für sich verschwinden¹. Wir lösen nach $f_{|E}$ auf und erhalten mit (B.10, B.11)

$$f_{|E} = \frac{A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)}{B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)} \frac{1}{\left(\frac{B_{a E_\nu - \hbar ck}^{E_\nu}(k, T)}{B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)} e^{\frac{\hbar ck}{k_B T}} - 1 \right)}. \quad (\text{B.28})$$

Im Gleichgewicht müssen wir aber die Planck-Verteilung vorfinden (1.32),

$$f_{|E} = \frac{y}{\exp \frac{\hbar ck}{k_B T} - 1}, \quad (\text{B.29})$$

und es folgt

$$\frac{A_{E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)}{B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)} = y, \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{B_{a E_\nu - \hbar ck}^{E_\nu}(k, T)}{B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T)} = 1. \quad (\text{B.31})$$

Diese Übereinstimmung wäre ohne die Einführung der stimulierten Emission nicht gefunden worden.

Die drei Einstein-Koeffizienten sind miteinander verknüpft, es genügt einen zu messen. Und in der Tat, es sind diese Koeffizienten, die gemessen werden, nicht die atomaren Größen.

¹Hier wird nicht darauf eingegangen, daß es verschiedene Zustände gleicher Energie geben kann.

B.4 Nichtgleichgewicht: Der Relaxationszeitansatz

Wir betrachten den Fall, daß Strahlung im *Nichtgleichgewicht* mit einem Gas im *Gleichgewicht* wechselwirkt. Dann reduziert sich (B.23) auf

$$\mathcal{S} = -\kappa (f - f|_E). \quad (\text{B.32})$$

κ ist der effektive Absorptionskoeffizient und ist gegeben durch

$$\kappa(k, T, n) = n \left(e^{\frac{\hbar ck}{k_B T}} - 1 \right) \sum_{\nu} B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) e^{-\frac{E_\nu}{k_B T}}. \quad (\text{B.33})$$

Das Inverse des Absorptionskoeffizienten kann als die mittlere freie Flugzeit eines Photons zwischen zwei Stößen mit einem Atom interpretiert werden. Damit entspricht (B.32) dem Relaxationszeitansatz in der kinetischen Gastheorie (Krook'sches Modell) [19]. κ ist eine Funktion der Wellenzahl k sowie der Gastemperatur T und der Atomzahldichte n und muß gemessen werden.

κ hängt von der Gasdichte n linear ab, verschwindet also im Vakuum.

Für den einfachen Sonderfall der grauen Materie ist κ unabhängig von der Wellenzahl.

Mit dem Relaxationszeitansatz (B.32) lautet die Strahlungs-Transport-Gleichung (1.35)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + cn_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\kappa (f - f_E). \quad (\text{B.34})$$

In dieser Form gilt die Strahlungs-Transport-Gleichung für einen Beobachter im Schwerpunktsystem der Materie, $1/\kappa$ ist die Relaxationszeit, die ein Beobachter in diesem System mißt.

Schon diese Gleichung ist nicht einfach lösbar. Wollte man die Abweichungen des Gases vom Gleichgewicht berücksichtigen, hat man (B.23) mit der Nichtgleichgewichtsverteilung des Gases auszuwerten. Ist das Gas nur wenig aus dem Gleichgewicht gebracht, so gibt der Relaxationszeitansatz wenigstens den führenden Term des Stoßterms wider.

Wir notieren noch den Stoßterm für den Fall, daß die Geschwindigkeitsverteilung des Gases im Gleichgewicht ist, nicht jedoch die Verteilung der Anregungsenergie ($n_{E_\nu} \neq n_{E_\nu}^E$),

$$\mathcal{S} = \sum_{\nu} B_{e E_\nu}^{E_\nu - \hbar ck}(k, T) (n_{E_\nu - \hbar ck} - n_{E_\nu}) \left(\frac{y}{\frac{n_{E_\nu - \hbar ck}}{n_{E_\nu}} - 1} - f \right). \quad (\text{B.35})$$

Um mit diesem Stoßterm zu arbeiten, müßten wir also die Atomzahldichte jedes Anregungszustandes einzeln verfolgen. Das bedeutet eine drastische Erhöhung des mathematischen Aufwandes.

B.5 Doppler-Verbreiterung von Linienspektren

Als Beispiel berechnen wir den Einstein-Emissionskoeffizienten für den Fall, daß der atomare Emissionskoeffizient eine reine Delta-Funktion ist,

$$A_{E\nu}^{E\nu-\hbar c\bar{k}} = A\delta(\bar{k} - k_0) = A\delta\left(k - \frac{1}{c}C_k k_k - k_0\right), \quad (\text{B.36})$$

d.h. ein Atom soll nur Photonen der Frequenz ck_0 aussenden. Das stimmt mit der Realität nur bedingt überein, in Wirklichkeit ist $A_{E\nu}^{E\nu-\hbar c\bar{k}}$ eine Lorentz-Kurve ([20], Abschnitt 12.2.2).

Aus (B.24) mit (B.9, B.10) und der Näherung (H.29) für kleine Teilchengeschwindigkeiten ergibt sich zunächst

$$A_{E\nu}^{E\nu-\hbar ck}(k, T) = A\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}^3 \int \delta\left(k - \frac{1}{c}C_k k_k - k_0\right) \left(1 - \frac{1}{c}C_k \frac{k_k}{k}\right) e^{-\frac{m}{2k_B T}C^2} d\mathbf{C} \quad (\text{B.37})$$

Wir setzen $C_k = C\gamma_k$ mit einem Normalenvektor γ_k sowie $d\mathbf{C} = C^2 dC d\Omega_\gamma$ mit dem Raumwinkelelement $d\Omega_\gamma$. Mit den Rechenregeln

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad , \quad \int g(x)\delta(x-x_0) dx = g(x_0) \quad (\text{B.38})$$

folgt

$$A_{E\nu}^{E\nu-\hbar ck}(k, T) = A\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}^3 \left(\frac{k_0}{k}\right) (k - k_0)^2 \int \frac{e^{-\frac{m}{2k_B T}\left(\frac{k-k_0}{\frac{1}{c}\gamma_k k_k}\right)^2}}{\left|\frac{1}{c}\gamma_k k_k\right|^3} d\Omega_\gamma. \quad (\text{B.39})$$

Jetzt gehen wir in ein Koordinatensystem, in dem der Vektor k_k in x_3 -Richtung zeigt, d.h. $\gamma_k k_k = k \cos \vartheta$ und $d\Omega_\gamma = -d \cos \vartheta d\varphi$, und erhalten nach Integration über φ

$$A_{E\nu}^{E\nu-\hbar ck}(k, T) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} A \sqrt{\beta}^3 \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{k_0}{k}\right)}{\left(1 - \frac{k_0}{k}\right)} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{|\cos \vartheta|} e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \vartheta}} d\frac{1}{\cos \vartheta} \quad (\text{B.40})$$

mit

$$\beta = \frac{mc^2}{2k_B T} \left(\frac{k - k_0}{k}\right)^2. \quad (\text{B.41})$$

Bei der Lösung des Integrals ist der Vorzeichenwechsel bei $\pi/2$ zu beachten. Es ergibt sich mit der Substitution $1/\cos \vartheta = z$ zu

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{|\cos \vartheta|} e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \vartheta}} d\frac{1}{\cos \vartheta} = \int_{z=1}^{\infty} e^{-\beta z^2} dz^2 = \frac{1}{\beta} e^{-\beta}. \quad (\text{B.42})$$

Das führt uns zu dem endgültigem Ergebnis

$$A_{E\nu}^{E\nu-\hbar ck}(k, T) = 2A\sqrt{\frac{mc^2}{2\pi k_B T} \frac{k_0}{k^2}} e^{-\frac{mc^2}{2k_B T}\left(\frac{k-k_0}{k}\right)^2}. \quad (\text{B.43})$$

Aus der scharfen Emissionslinie wird eine (sehr schmale) Gauß-Glockenkurve um die Frequenz ck_0 . Je höher die Temperatur ist und je leichter die Gasatome sind, desto breiter ist die Glocke.

Aufgrund der Doppler-Verbreiterung emittiert ein Gas also alle Frequenzen – die meisten allerdings mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit. Daher kann Strahlung sich mit einem solchen Gas ins Gleichgewicht setzen.

Das tatsächliche Emissionsspektrum ist aufgrund der großen Zahl der möglichen Übergänge (Serien) eine Überlagerung von sehr vielen Glockenkurven.

Anhang C

Kugelflächenfunktionen

In diesem Anhang werden symmetrische und irreduzible Tensoren sowie die Darstellung der Kugelflächenfunktionen als symmetrische irreduzible Tensoren vorgestellt. Die Beweise für die angegebenen Formeln beruhen mehr auf geduldigem Buchhalten von Möglichkeiten als auf interessanten Gedanken und sind daher nicht aufgeführt.

C.1 Vollständig spurfreie symmetrische Tensoren

C.1.1 Symmetrie

Ein n -stufiger Tensor $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$ heißt symmetrisch, falls für jedes Indexpaar i_j, i_k gilt

$$S_{i_1 i_2 \dots i_j \dots i_k \dots i_n} = S_{i_1 i_2 \dots i_k \dots i_j \dots i_n}. \quad (\text{C.1})$$

Ein nichtsymmetrischer Tensor $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ wird symmetrisiert durch die Vorschrift

$$A_{(i_1 i_2 \dots i_n)} = \frac{1}{n!} (A_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} + A_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n-1}} + \dots \text{alle Index - Permutationen}). \quad (\text{C.2})$$

Die Indizes in den runden Klammern kennzeichnen den symmetrischen Anteil des Tensors. Z.B. gilt für den symmetrischen Anteil eines Tensors zweiter Stufe

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}). \quad (\text{C.3})$$

Ein vollständig symmetrischer n -stufiger Tensor hat

$$Z_{sym} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{C.4})$$

unabhängige Elemente.

C.1.2 Spurfreiheit

Ein n -stufiger Tensor $S_{i_1 i_2 \dots i_n}$ heißt vollständig spurfrei (oder irreduzibel), falls für jedes Indexpaar i_j, i_k gilt

$$S_{i_1 i_2 \dots i_j \dots i_k \dots i_n} \delta_{i_j i_k} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Der irreduzible Anteil eines symmetrischen Tensors $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ wird nach der folgenden Vorschrift gewonnen [49]

$$A_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} = \sum_{k=0}^{\left\| \frac{n}{2} \right\|} a_{nk} \delta_{(i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k})} A_{i_{2k+1} \dots i_n) j_1 \dots j_k j_1 \dots j_k} \quad (\text{C.6})$$

mit

$$a_{nk} = (-1)^k \frac{n! (2n - 2k - 1)!!}{(n - 2k)! (2n - 1)!! (2k)!!}$$

$$\left\| \frac{n}{2} \right\| = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

$$n!! = n(n-2) \cdots (2 \text{ oder } 1) = \prod_{j=0}^{\left\| \frac{n-1}{2} \right\|} (n-2j)$$

Zur Berechnung etwas übersichtlicher ist die Schreibweise

$$\begin{aligned} A_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} &= A_{i_1 i_2 \dots i_n} + \alpha_{n_1} (\delta_{i_1 i_2} A_{i_3 \dots i_n k k} + \text{Permutationen}) + \\ &+ \alpha_{n_2} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} A_{i_5 \dots i_n k k l l} + \text{Permutationen}) + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Dabei sollen nur die Permutationen der Indizes auftreten, die wirklich verschieden sind, also nicht durch die Symmetriebedingungen ineinander zu überführen sind. Dann sind die Koeffizienten gegeben durch

$$\alpha_{n_k} = \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1} (2n - 2j - 1)}. \quad (\text{C.9})$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} A_{\langle i \rangle} &= A_i \\ A_{\langle ij \rangle} &= A_{(ij)} - \frac{1}{3} A_{kk} \delta_{ij} \\ A_{\langle ijk \rangle} &= A_{(ijk)} - \frac{1}{5} (A_{(il)} \delta_{jk} + A_{(jl)} \delta_{ik} + A_{(kl)} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Ein vollständig irreduzibler n -stufiger symmetrischer Tensor hat

$$Z_{\langle sym \rangle} = 2n + 1 \quad (\text{C.11})$$

unabhängige Elemente.

Ein symmetrischer Tensor $A_{i_1 \dots i_n}$ läßt sich durch die spurfreien Anteile seiner Spuren darstellen gemäß

$$A_{i_1 \dots i_n} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,k} \left(\delta_{i_1 i_2} \cdots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} A_{(i_{2k+1} \dots i_n)}^{(k)} + \cdots (P_{nk} \text{ Terme}) \right), \quad (\text{C.12})$$

dabei bedeutet $A_{(i_{2k+1} \dots i_n)}^{(k)}$ die k -fache Spur von $A_{i_1 \dots i_n}$ und es gilt

$$P_{nk} = \frac{n!}{(n-2k)! 2^k k!}. \quad (\text{C.13})$$

Die Koeffizienten $b_{n,k}$ sind durch eine Rekursionsformel bestimmt,

$$b_{n,0} = 1 \quad (\text{C.14})$$

$$b_{n,k} = \frac{b_{n-2,k-1}}{2n+1-2k} \quad (\text{C.15})$$

C.2 Kugelflächenfunktionen im Euklidischen Raum

Eine Darstellung der Kugelflächenfunktionen ist gegeben durch die irreduziblen symmetrischen Tensoren [50]

$$n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}. \quad (\text{C.16})$$

Dabei sind die erzeugenden Vektoren n_i Einheitsvektoren, in Kugelkoordinaten etwa dargestellt durch

$$n_i = \{ \sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \}_i. \quad (\text{C.17})$$

Die Kugelflächenfunktionen sind in dem Sinne orthogonal, daß für die Integration über den Raumwinkel $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ gilt

$$\int n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} n_{\langle j_1 \dots j_m \rangle} d\Omega = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{4\pi}{\prod_{j=0}^n (2j+1)} \delta_{\langle i_1 \dots i_n \rangle \langle j_1 \dots j_n \rangle} & n = m \end{cases}. \quad (\text{C.18})$$

Dabei ist $\delta_{k_1 \dots k_l}$ ein verallgemeinerter Einheitstensor mit gerader Indexzahl l , definiert durch

$$\delta_{k_1 \dots k_l} = \delta_{k_1 k_2} \cdots \delta_{k_{l-1} k_l} + \cdots + \left(\frac{l!}{(\frac{l}{2})! 2^{\frac{l}{2}}} \text{ Elemente} \right). \quad (\text{C.19})$$

Ein wichtiger Zusammenhang ist die Überschiebung eines Tensors $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ mit dem Integral in (C.18)

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} \int n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} n_{\langle j_1 \dots j_m \rangle} d\Omega = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{4\pi n!}{\prod_{j=0}^n (2j+1)} A_{\langle j_1 \dots j_n \rangle} & n = m \end{cases}. \quad (\text{C.20})$$

Ferner gilt die wichtige Formel

$$n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} n_k = n_{\langle i_1 \dots i_n n_k \rangle} + \frac{n}{2n+1} n_{\langle i_1 \dots i_{n-1} \rangle} \delta_{i_n k}. \quad (\text{C.21})$$

Anhang D

Phänomenologische Erweiterte Thermodynamik mit Lagrange-Multiplikatoren

In diesem Anhang wird die Erweiterte Thermodynamik für eine Komponente eines mehrkomponentigen Systems formuliert, also etwa für die Strahlung oder das Gas in einem Strahlung-Materie-System. Wir beschränken uns dabei auf ideale Mischungen; die Behandlung geschieht in Anlehnung an [37].

D.1 Voraussetzungen

Wir betrachten ein thermodynamisches System mit den Komponenten \mathcal{A} und \mathcal{B} . Der thermodynamische Zustand des gesamten Systems sei vollständig bestimmt durch die Größen u_A , $A = 1, \dots, N$, die die zu betrachtende Komponente \mathcal{A} beschreiben und durch Größen v_B , $B = 1, \dots, M$, die den mit \mathcal{B} bezeichneten Restanteil der Mischung beschreiben. Für die u_A sollen Feldgleichungen der Form

$$\frac{\partial u_A}{\partial t} + \frac{\partial F_{Ak}}{\partial x_k} = P_A, \quad (\text{D.1})$$

existieren, die die Evolution der u_A in der Raum-Zeit beschreiben. Diese Gleichungen können z.B. die Momentengleichungen der kinetischen Theorie der Strahlung sein.

Wir bezeichnen die u_A als Volumendichten, die F_{Ak} als Flüsse und die P_A als Produktionen. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist die Berechnung von Materialgleichungen für Flüsse und Produktionen, bzw. für die Momente, d.h. von Gleichungen, die Flüsse und Produktionen auf

die Felder u_A und v_B zurückführen.

Wir gehen im folgenden davon aus, daß für die v_B ein Satz von Gleichungen existiert, aus denen sie bestimmt werden können. Desweiteren gebe es für den Anteil \mathcal{B} eine Entropiebilanz der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} = \Sigma = \widehat{\Sigma} + \overline{\Sigma}, \quad (\text{D.2})$$

dabei ist $\eta(v_B)$ die Entropiedichte von \mathcal{B} , $\Phi_k(v_B)$ der Entropiefluß und $\Sigma(v_B)$ die Entropieproduktion. Letztere haben wir aufgeteilt in einen Anteil $\widehat{\Sigma} \geq 0$, der die Entropieproduktion aufgrund der Wechselwirkungen zwischen den Teilchen von \mathcal{B} untereinander beschreibt und in einen Anteil $\overline{\Sigma}$, der die Entropiezufuhr durch Wechselwirkungen von \mathcal{B} mit der von uns ausgewählten Komponente \mathcal{A} beschreibt.

Die Gleichungen für die v_B müssen nicht notwendig aus den Prinzipien der Erweiterten Thermodynamik gewonnen worden sein. In der Einleitung haben wir z.B. die Materie, mit der die Strahlung wechselwirken soll, durch die klassische Thermodynamik irreversibler Prozesse beschrieben¹.

Das Ziel der Erweiterten Thermodynamik ist es, aus den Momentengleichungen (D.1) ein geschlossenes System von Feldgleichungen für die Felder u_A , den Variablen der Erweiterten Thermodynamik, zu erhalten. Dazu werden Materialgleichungen für die Flüsse F_{Ak} und die Produktionen P_A benötigt.

In der Erweiterten Thermodynamik idealer Mischungen sind diese von der Form

$$F_{Ak} = \mathcal{F}_{Ak}(u_B), \quad (\text{D.3})$$

$$P_A = \mathcal{P}_A(u_B, v_C). \quad (\text{D.4})$$

Eine Besonderheit der Erweiterten Thermodynamik ist, daß in den Materialgleichungen weder Gradienten noch Zeitableitungen der u_A auftreten. Daher ergibt sich für die u_A ein System von Feldgleichungen erster Ordnung.

Die Idealität der Mischung spiegelt sich darin wieder, daß die Flüsse nicht von den v_B abhängen. Dies gilt nicht für die Produktionen, die auch eine Folge der Wechselwirkungen zwischen den Teilchen verschiedener Komponenten sind. Immerhin können wir die Produktionen zerlegen in einen Anteil

$$\widehat{P}_A = \widehat{\mathcal{P}}_A(u_B), \quad (\text{D.5})$$

der aus den Wechselwirkungen der Teilchen der betrachteten Komponente \mathcal{A} untereinander resultiert, und einen Anteil

$$\overline{P}_A = \overline{\mathcal{P}}_A(u_B, v_C), \quad (\text{D.6})$$

¹Dann hängen Entropiefluß und -produktion zusätzlich von den Gradienten der v_B ab.

der die Wechselwirkungen der Teilchen verschiedener Komponenten beschreibt. Es gilt

$$P_A = \widehat{P}_A + \overline{P}_A. \quad (\text{D.7})$$

Eine Lösung des Feldgleichungssystems (unter Berücksichtigung der Gleichungen für die v_B) für ein Anfangsrandwertproblem heißt thermodynamischer Prozeß.

Wieviele und welche Variablen u_A zur Beschreibung eines gegebenen thermodynamischen Prozesses benötigt werden, kann in der Regel nur durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen entschieden werden.

D.2 Das Entropieprinzip

Die Materialgleichungen (D.3, D.4) werden durch das Entropieprinzip eingeschränkt. Dieses werden wir jetzt für eine Komponente eines mehrkomponentigen Systems formulieren, also etwa für die Strahlung in einem Strahlung-Materie-System. Wir orientieren uns wieder an [37]:

i.) Die Lösungen der Feldgleichungen (D.1) müssen eine weitere Bilanzgleichung, die (Partial-) Entropiebilanz der Komponente \mathcal{A} , erfüllen,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} = \sigma = \widehat{\sigma} + \overline{\sigma}. \quad (\text{D.8})$$

h ist die Entropiedichte, ϕ_k ist der Entropiefluß und σ ist die Entropieproduktion, die wir wieder entsprechend der Wechselwirkungsprozesse in zwei Anteile geteilt haben. $\widehat{\sigma}$ ist die interne Entropieproduktion innerhalb der Komponente, $\overline{\sigma}$ ist die Entropiezufuhr aufgrund der Wechselwirkung mit den anderen Komponenten.

ii.) Auch die unter i.) eingeführten Größen sind durch Materialfunktionen gegeben, die nur von den Variablen abhängen,

$$h = \mathfrak{h}(u_A), \quad \phi_k = \mathfrak{p}_k(u_A), \quad \widehat{\sigma} = \widehat{\mathfrak{s}}(u_A), \quad \overline{\sigma} = \overline{\mathfrak{s}}(u_A, v_B). \quad (\text{D.9})$$

iii.) Unter dem Begriff Gleichgewicht verstehen wir einen Prozeß, in dem alle Produktionen verschwinden. Im Gleichgewicht nimmt die Entropiedichte h ein Maximum an. Dies wird garantiert durch die Bedingung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u_A \partial u_B} - \textit{negativ definit}. \quad (\text{D.10})$$

Im Nichtgleichgewicht muß die Gesamtentropieproduktion positiv sein,

$$\widehat{\Sigma} + \overline{\Sigma} + \widehat{\sigma} + \overline{\sigma} \geq 0. \quad (\text{D.11})$$

Falls entweder die eine oder die andere der beiden Komponenten alleine vorliegt, reduziert sich diese Bedingung auf

$$\widehat{\Sigma} \geq 0, \quad \widehat{\sigma} \geq 0. \quad (\text{D.12})$$

Da $\widehat{\Sigma}$ und $\widehat{\sigma}$ in einer idealen Mischung völlig unabhängig von der Anwesenheit der jeweils anderen Komponente sind, gelten diese Gleichungen auch im Mischungsfall. Daher reduziert sich (D.11) auf

$$\overline{\Sigma} + \overline{\sigma} \geq 0. \quad (\text{D.13})$$

Wir können die Entropiebilanz (D.8) also schreiben als

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} \geq -\overline{\Sigma}. \quad (\text{D.14})$$

D.3 Auswertung des Entropieprinzips

Die Entropiegleichung (D.14) muß für alle thermodynamischen Prozesse gelten, d.h. für alle Lösungen der Feldgleichungen. Die Feldgleichungen bilden also Einschränkungen an die Felder u_A , die die Entropiebilanz erfüllen sollen. Nach einem Lemma von Liu [33] kann man sich von diesen Einschränkungen durch Lagrange-Multiplikatoren Λ_A befreien. Danach muß die neue Ungleichung²

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi_k}{\partial x_k} - \Lambda_A \left(\frac{\partial u_A}{\partial t} + \frac{\partial F_{Ak}}{\partial x_k} - P_A \right) \geq -\overline{\Sigma} \quad (\text{D.15})$$

für *alle* Felder u_A gelten. Die Lagrange-Multiplikatoren sind Funktionen der u_A .

Ausdifferenzieren liefert

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u_A} - \Lambda_A \right) \frac{\partial u_A}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial F_{Ak}} - \Lambda_A \right) \frac{\partial F_{Ak}}{\partial x_k} + \Lambda_A P_A \geq -\overline{\Sigma}. \quad (\text{D.16})$$

Da diese Gleichung für alle Felder u_A gelten muß, gilt sie auch für beliebige Werte der Ableitungen. Wir schließen, daß gelten muß

$$dh = \Lambda_A du_A, \quad (\text{D.17})$$

$$d\phi_k = \Lambda_A dF_{Ak}. \quad (\text{D.18})$$

Die Ungleichung reduziert sich auf

$$\Lambda_A P_A \geq -\overline{\Sigma} \quad (\text{D.19})$$

Aus der Bedingung (D.10) und der Gibbs-Gleichung der Erweiterten Thermodynamik (D.17) folgt

$$\frac{\partial \Lambda_B}{\partial u_A} - \text{symmetrisch und negativ definit}. \quad (\text{D.20})$$

²Auch für die Multiindizes A gilt die Einsteinsche Summationskonvention.

Damit ist die Abbildung $u_A \leftrightarrow \Lambda_A$ umkehrbar und die u_A und die F_{Ak} können als Funktionen der Lagrange-Multiplikatoren angesehen werden für die gilt

$$u_A = -\frac{\partial h'}{\partial \Lambda_A}, \quad (\text{D.21})$$

$$F_{Ak} = -\frac{\partial \phi'_k}{\partial \Lambda_A}. \quad (\text{D.22})$$

Die Potentiale h' und ϕ'_k sind definiert durch

$$h' = h - \Lambda_A u_A, \quad (\text{D.23})$$

$$\phi'_k = \phi_k - \Lambda_A F_{Ak}. \quad (\text{D.24})$$

Aus (D.22) folgen Integrabilitätsbedingungen,

$$\frac{\partial F_{Ak}}{\partial \Lambda_B} = \frac{\partial F_{Bk}}{\partial \Lambda_A}, \quad (\text{D.25})$$

die Einschränkungen an die Flüsse bilden. Die Auswertung dieser Beziehungen wird in dem Buch von Müller&Ruggeri [37] für viele Beispiele durchgeführt.

Die Produktionen sind durch die Restungleichung (D.19) eingeschränkt, jedoch lassen sich für sie keine quantitativen Aussagen treffen. Hier liegt der große Vorteil der kinetischen Theorie von Gasen (ob Strahlung oder Atome), da die Produktionen aus den Wechselwirkungstermen und der aus dem Entropiemaximumprinzip bestimmten Verteilungsfunktion berechnet werden können.

Zum Abschluß dieses kurzen Überblicks sei gesagt, daß die nach den Prinzipien der Erweiterten Thermodynamik bestimmten Materialgleichungen symmetrisch-hyperbolische Feldgleichungssysteme liefern. Diese haben einige gern gesehene Eigenschaften, wie die Endlichkeit aller Ausbreitungsgeschwindigkeiten, Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie deren stetige Abhängigkeit von den Anfangs- und Randbedingungen.

Anhang E

f_{\max} als Lösung der Strahlungs–Transport-Gleichung

Es ist eine interessante Frage, ob die maximierte Verteilungsfunktion dem Anspruch genügt, eine Lösung der Strahlungs–Transport-Gleichung zu sein. Wir werden jetzt untersuchen, unter welchen Umständen diese Frage positiv beantwortet werden kann.

Da wir die Verteilungsfunktion nur in erster Ordnung berechnen konnten, können wir auch nur eine Näherungslösung der Strahlungs–Transport-Gleichung erwarten. Wir werden also nur lineare Glieder in den Abweichungen vom Gleichgewicht (das sind die $\lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t$ und alle Orts- und Zeitableitungen) berücksichtigen. Die Rechnung ist durchaus etwas umständlich, weshalb wir sie in vielen Schritten explizit machen.

Wir betrachten die Strahlungs-Transport-Gleichung mit einem Potenz-Gesetz für die Absorption und isotroper Streuung, ebenfalls nach einem beliebigen Potenz-Gesetz,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + cn_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\kappa k^\nu (f - f_{|E}(k, T)) - \zeta k^\mu \left(f - \frac{1}{4\pi} \int f d\Omega \right). \quad (\text{E.1})$$

Wir setzen die linearisierte Verteilungsfunktion (5.17) in diese Gleichung ein und erhalten nach der Linearisierung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Xi_{|E}}{\partial t} + cn_i \frac{\partial \Xi_{|E}}{\partial x_i} \right) + \sum_{r=0}^R \sum_{n=0}^N \Xi_{|E}^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} \left(\frac{\partial \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + cn_k \frac{\partial \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial x_k} \right) \\ &= -(\kappa^0 k^\nu + \zeta^0 k^\mu) \sum_{r=0}^R \sum_{n=1}^N \Xi_{|E}^r n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Nur wenn diese Gleichung gültig ist, ist die maximierte Verteilungsfunktion eine Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung. Wir werden jetzt zeigen, daß dies genau dann der Fall ist,

wenn die aus der Entropiemaximierung stammenden Momentengleichungen erfüllt sind. Für die oben angestzten Wechselwirkungsprozesse lauten diese mit $\chi = \frac{k_B T}{\hbar c}$

$$\frac{\partial u^t}{\partial t} + c \frac{\partial u_k^t}{\partial x_k} = -\kappa \sum_q \sum_s C(t + \nu, s) \mathcal{C}_{sq}^{-1} \chi^{q-t-\nu} \left(u^q - u_{|E}^q(T) \right) \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t}{\partial t} + \frac{n}{2n+1} c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^t}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^t}{\partial x_k} (1 - \delta_{nN}) \\ &= -\kappa \sum_q \sum_s C(t + \nu, s) \mathcal{C}_{sq}^{-1} \chi^{q-t-\nu} \left(u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q \right) - \\ & \quad - \zeta \sum_q \sum_s C(t + \mu, s) \mathcal{C}_{sq}^{-1} \chi^{q-t-\nu} \left(u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q \right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Um (E.2) zu vereinfachen, verwenden wir die Hilfsformel (C.21), definieren die Abkürzungen

$$\Xi_{|E} = k\chi, \quad (\text{E.5})$$

$$\tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = -\frac{n!}{\prod_{j=0}^n (2j+1)} \lambda_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r, \quad (\text{E.6})$$

$$\tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} = \frac{\prod_{j=0}^n (2j+1)}{n!} n_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \quad (\text{E.7})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \sum_{r=0}^R k^r \chi^r * \\ & * \left(-\delta_{r1} \delta_{n0} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \delta_{r1} \delta_{n1} \frac{1}{3} c \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + c \frac{n}{2n+1} \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^r}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^r}{\partial x_k} (1 - \delta_{nN}) \right) + \\ & + \tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_{N+1} \rangle} \sum_{r=0}^R k^r \chi^r c \frac{N+1}{2N+3} \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^r}{\partial x_{i_{N+1}}} \\ &= -\sum_{n=0}^N \tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle} \kappa \sum_{r=0}^R k^{r+\nu} \chi^r \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r - \\ & \quad - \sum_{n=1}^N \tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r \zeta \sum_{r=0}^R k^{r+\mu} \chi^r \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Da die $\tilde{n}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}$ unabhängig sind, müssen ihre Faktoren verschwinden. Für $n \leq N$ erhalten wir

die Bedingungen

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^R k^r \chi^r \left(-\delta_{r1} \delta_{n0} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \delta_{r1} \delta_{n1} \frac{1}{3} c \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right. \\
& \left. + \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r}{\partial t} + c \frac{n}{2n+1} \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^r}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n k \rangle}^r}{\partial x_k} (1 - \delta_{nN}) \right) \\
& = -\kappa \sum_{r=0}^R k^{r+\nu} \chi^r \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r - \\
& -\zeta \sum_{r=0}^R k^{r+\mu} \chi^r \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r (1 - \delta_{n0}).
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Für $n = N + 1$ ergeben sich die Forderungen

$$\frac{\partial \tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^r}{\partial x_{i_{N+1}}} = 0. \tag{E.10}$$

Diese bilden Einschränkungen an die $\tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_N \rangle}^r$ und damit an die $u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$. Sie lassen sich interpretieren als Rudimente der $N + 1$. Momentengleichungen, wie sie sich ergeben, wenn alle Momente höheren Grades als N gleich Null gesetzt werden.

Es ist klar, daß diese Gleichungen für $N \rightarrow \infty$ nicht auftreten, und damit auch nicht die durch sie gegebenen Einschränkungen an die Felder. D.h. die maximierte Verteilungsfunktion kann nur dann eine exakte Lösung der Strahlungs-Transport-Gleichung sein, wenn N nach unendlich geht und die Bedingung (E.9) erfüllt ist, die wir jetzt weiter behandeln.

Wir ersetzen die $\tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r$ mittels (5.24, E.6) durch

$$\tilde{\lambda}_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^r = \sum_{t=0}^R \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{t+3}}{4\pi y} \left(u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t - u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle|E}^t(T) \right), \tag{E.11}$$

und erhalten für $n = 0$ und $n \neq 0$ die Bedingungen (es wird wieder linearisiert, daher gibt es keine neuen Ableitungen von χ)

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^R k^r \chi^r \left(- \left(\delta_{r1} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \sum_{t=0}^R \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{t+3}}{4\pi y} \frac{\partial u_{|E}^t(T)}{\partial t} \right) \right. \\
& \left. + \sum_{t=0}^R \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{t+3}}{4\pi y} \left(\frac{\partial u^t}{\partial t} + c \frac{\partial u_k^t}{\partial x_k} \right) \right) \\
& = -\kappa \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{r+t+3}}{4\pi y} \left(u^t - u_{|E}^t(T) \right)
\end{aligned} \tag{E.12}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^R k^r \chi^r \left(-\frac{c}{3} \left(\delta_{r1} \frac{1}{\chi} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \sum_{t=0}^R \mathcal{C}_{rt}^{-1} \chi^{t+3} \frac{\partial u_{|E}^t(T)}{\partial x_i} \right) \delta_{n1} \right. \\
& \left. + \sum_{t=0}^R \mathcal{C}_{rt}^{-1} \chi^{t+3} \left(\frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t}{\partial t} + c \frac{n}{2n+1} \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{n-1} \rangle}^t}{\partial x_{i_n}} + c \frac{\partial u_{\langle i_1 i_2 \dots i_{nk} \rangle}^t}{\partial x_k} (1 - \delta_{nN}) \right) \right) \\
& = -\kappa \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{r+t+3}}{4\pi y} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t - \zeta \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\mu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \frac{\chi^{r+t+3}}{4\pi y} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t.
\end{aligned} \tag{E.13}$$

Schreiben wir mit (5.19, 5.23) $u_{|E}^t$ als

$$u_{|E}^t(T) = 4\pi y \frac{\mathcal{C}_{t1}}{t+3} \chi^{-t-3} \tag{E.14}$$

so sehen wir leicht, daß die jeweils ersten Terme dieser Gleichungen verschwinden.

In den Klammern auf den linken Seiten von (E.12, E.13) identifizieren wir die linken Seiten der Feldgleichungen (E.3, E.4), die wir durch ihre rechten Seiten ersetzen. Indem wir einige den Termen gemeinsame Faktoren herausnehmen und berücksichtigen, daß gilt $C(t + \nu, s) = C(t, s + \nu)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R \sum_{q=0}^R \sum_{s=0}^R k^r \chi^{r+q-\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} C(t, s + \nu) \mathcal{C}_{sq}^{-1} \left(u^q - u_{|E}^q(T) \right) \\
& = \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \chi^{r+t} \left(u^t - u_{|E}^t(T) \right) \\
& \quad \kappa \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R \sum_{q=0}^R \sum_{s=0}^R k^r \chi^{r+q-\nu+3} \mathcal{C}_{rt}^{-1} C(t, s + \nu) \mathcal{C}_{sq}^{-1} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q + \\
& \quad + \zeta \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R \sum_{q=0}^R \sum_{s=0}^R k^r \chi^{r+q-\mu+3} \mathcal{C}_{rt}^{-1} C(t, s + \mu) \mathcal{C}_{sq}^{-1} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^q \\
& = \kappa \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \chi^{r+t+3} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t + \zeta \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R k^{r+\mu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} \chi^{r+t+3} u_{\langle i_1 i_2 \dots i_n \rangle}^t.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Die Gleichungen sind von ähnlicher Struktur, es genügt zur Diskussion, nur eine zu betrachten; wir wählen die erste. Umbenennen der Indizes erleichtert den Vergleich der beiden Seiten,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^R \sum_{t=0}^R \sum_{q=0}^R \sum_{s=0}^R k^r \chi^{r+q-\nu} \mathcal{C}_{rt}^{-1} C(t, s + \nu) \mathcal{C}_{sq}^{-1} \left(u^q - u_{|E}^q(T) \right) \\
& = \sum_{q=0}^R \sum_{s=0}^R k^{s+\nu} \chi^{s+q} \mathcal{C}_{sq}^{-1} \left(u^q - u_{|E}^q(T) \right).
\end{aligned} \tag{E.16}$$

Falls $\sum_{q=0}^R C_{rt}^{-1} C(t, s + \nu) = \delta_{r, s + \nu}$ gilt, sind diese Bedingungen erfüllt. Das jedoch ist nur der Fall für $s + \nu \leq R$. Erst für $R \rightarrow \infty$ tritt dieses Problem nicht auf, und die Gleichung wird zu einer Identität.

Wir schließen, daß die maximierte Verteilungsfunktion mit unendlich vielen Momenten ($R, N \rightarrow \infty$) zusammen mit den mit ihrer Hilfe bestimmten Momentengleichungen eine Lösung der (linearisierten) Strahlungs-Transport-Gleichung ist.

Weiterhin wird diese Gleichung eine Identität, wenn wir uns auf echt graue Materie ($\nu = \mu = 0$) beschränken. D.h. im Fall echt grauer Materie müssen wir nur die Bedingung $R > 0$ erfüllen. Es genügt, $R = 1$ zu setzen.

Anhang F

Verteilungsfunktion außerhalb eines Hohlraumes

Wir betrachten die aus einem mit Gleichgewichtsstrahlung gefüllten Raum austretende Strahlung, die sich außerhalb des Raumes im Vakuum ungestört ausbreitet (Hohlraumstrahlung) und fragen nach der Photonen-Verteilung, die sich im Abstand r von der Strahlungsquelle einstellt. Das ist deshalb ein interessantes Problem, weil die von der Sonne ausgestrahlte Strahlung fast perfekte Gleichgewichtsstrahlung zur Temperatur $T_{\odot} = 5700K$ ist.

Wir betrachten zwei kleine Flächenelemente dA_S und dA_D mit den Normalenvektoren n_i^S und n_i^D ; den Verbindungsvektor zwischen den beiden Flächen bezeichnen wir mit $l_i = l n_i$. dA_S sei ein Element der Öffnung des Raumes durch die die Strahlung austritt oder der Sonnenoberfläche, dA_D sei ein Flächenelement eines Strahlungsdetektors. Wir fragen nach der Verteilungsfunktion f_D an der Stelle des Detektors.

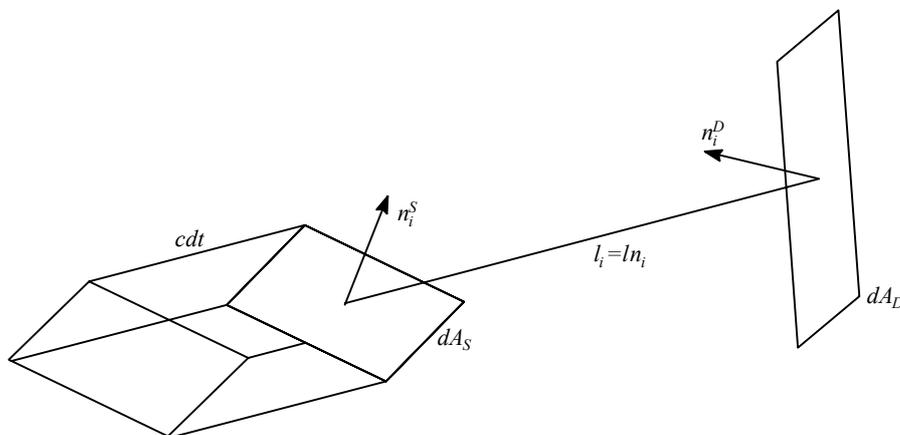


Abbildung F.1: Zur Geometrie von Sender und Detektor

Pro Zeiteinheit fliegen

$$cn_i^S n_i dA_S f_{|E} d\mathbf{k} \quad (\text{F.1})$$

Photonen mit Wellenzahlen aus $(k, k + dk)$ und Richtungsvektoren aus einem Raumwinkel $d\Omega$ um n_i durch die Fläche dA_S (siehe Abb. F.1). Diese Photonen treffen nur dann auf den Detektor, wenn sie einen Raumwinkel um den Verbindungsvektor durchfliegen, der mit der Schattenfläche des Detektors übereinstimmt, also

$$l^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = n_i n_i^D dA_D. \quad (\text{F.2})$$

Damit gilt auch

$$d\mathbf{k} = k^2 dk \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = k^2 dk \frac{1}{l^2} n_i n_i^D dA_D. \quad (\text{F.3})$$

Die vom Sender kommende Strahlung, die durch den Detektor transportiert wird, erhalten wir, indem wir diese Formel in (F.1) einsetzen als

$$\frac{c}{l^2} dA_S dA_D n_j^S n_j n_i^D n_i f_{|E} k^2 dk. \quad (\text{F.4})$$

Andererseits wird entsprechend (F.1) die Detektorfläche von

$$c dA_D n_i^D n_i f_D k^2 dk d\Omega \quad (\text{F.5})$$

Photonen pro Zeiteinheit durchsetzt. Aus dem Vergleich der beiden letzten Formeln schließen wir

$$f_D k^2 dk d\Omega = f_{|E} k^2 dk n_j^S n_j \frac{dA_S}{l^2}. \quad (\text{F.6})$$

Dies ist die Zahldichte von Photonen mit Wellenzahlen aus $(k, k + dk)$ und Richtungsvektoren aus einem Raumwinkel $d\Omega$ um n_i am Ort des Detektors.

Definieren wir einen Winkel ϑ_L durch $\cos \vartheta_L = n_j^S n_j$, so sehen wir, daß diese Zahldichte nicht von der Größe der Senderfläche dA_S abhängt, sondern nur von ihrer Projektion $n_j^S n_j dA_S = \cos \vartheta_L dA_S$ in Richtung der Verbindungslinie. Das ist jedoch nur der Fall, wenn die Strahlung isotrop abgestrahlt wird, also $f_{|E}$ eine isotrope Funktion des Vektors n_i ist. Am Detektor ist es also nicht möglich, zu entscheiden, in welche Richtung die Flächennormale des Senders zeigt. Diese Eigenschaft der Hohlraumstrahlung ist als LAMBERTSches Kosinus-Gesetz bekannt. Aufgrund dieses Gesetzes erscheint uns die Sonne als Scheibe und nicht als räumlicher Körper.

Wir betrachten eine kreisförmige Senderfläche mit Radius R_\odot . Ein Flächenelement dieser Fläche hat die Größe

$$dA_S = R dR d\varphi, \quad (\text{F.7})$$

sein Ortsvektor sei $x_i^S = \{R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0\}_i$ und sein Normalenvektor sei $n_i^S = \{0, 0, 1\}_i$. Der Ort des Detektors liege bei $x_i^D = \{0, 0, r\}_i$ (Abb. F.2). Damit ergibt sich der Abstandsvektor zu

$$l_i = x_i^D - x_i^S = \{-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, r\}_i \quad (\text{F.8})$$

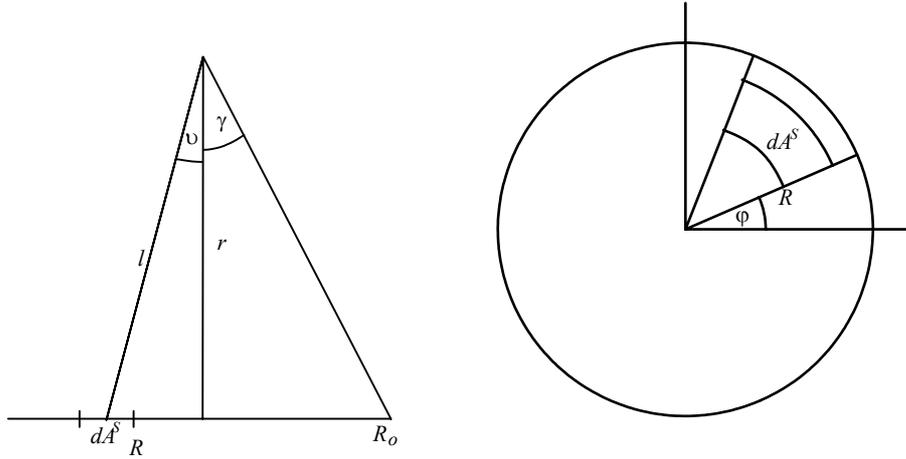


Abbildung F.2: Zur Geometrie des Kreisstrahlers

mit dem Betrag

$$l = \sqrt{r^2 + R^2}. \quad (\text{F.9})$$

Damit und mit $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ folgt aus (F.6)

$$f_D \sin \vartheta d\vartheta = f_{|E} \frac{-rR dR}{(r^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{F.10})$$

Nun gilt $l \cos \vartheta = r$ und also

$$d \cos \vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta = d\left(\frac{r}{l}\right) = \frac{rR dR}{(r^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{F.11})$$

Wir sehen, daß gilt $f_D = f_{|E}$, wenigstens für Winkel ϑ , die so gewählt sind, daß in Richtung ϑ vom Detektor noch Senderfläche zu sehen ist, also für alle ϑ die kleiner sind als $\vartheta_{\max} = \operatorname{arccot} \frac{r}{R_\odot} = \arccos \frac{r}{\sqrt{R_\odot^2 + r^2}}$.

Wir fassen zusammen: Im Abstand r von einem kreisförmigen Hohlraumstrahler mit Radius R_\odot findet man eine Photonen-Verteilungsfunktion von

$$f_r = \begin{cases} f_{|E}, & \vartheta \in \left(0, \arccos \frac{r}{\sqrt{R_\odot^2 + r^2}}\right) \\ 0, & \vartheta \in \left(\arccos \frac{r}{\sqrt{R_\odot^2 + r^2}}, \pi/2\right) \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

dabei ist $f_{|E}$ die Verteilungsfunktion im Hohlraum.

Aufgrund des Lambertschen Gesetzes ist diese Betrachtung auch auf Sonnenstrahlung anwendbar. Aufgrund der Geometrie (Abb. 10.1) ergibt sich dann (10.1).

Anhang G

Gibt es eine Strahlungstemperatur?

G.1 Entropieproduktion und Planck-Temperatur

Wir erinnern uns an die Entropieproduktion durch Wechselwirkung von Materie und Strahlung (3.18),

$$\sigma + \frac{r}{T} = k_B \int \left[\ln \left(\frac{y}{f} + 1 \right) - \frac{\hbar ck}{k_B T} \right] \mathcal{S} d\mathbf{k} \geq 0. \quad (\text{G.1})$$

Wir definieren eine frequenz- und richtungsabhängige Strahlungstemperatur (Planck-Temperatur) $T^*(k, n_i)$ gemäß [41][6][26]

$$\frac{\hbar ck}{k_B T^*} = \ln \left(\frac{y}{f} + 1 \right). \quad (\text{G.2})$$

Es gilt also $f = \frac{y}{\exp \frac{\hbar ck}{k_B T^*} - 1}$, die Planck-Temperatur gibt der Verteilungsfunktion die Form der Planck-Verteilung. Im Vergleich mit der maximierten Verteilungsfunktion (5.11) sehen wir, daß die Lagrange-Multiplikatoren der Erweiterten Thermodynamik Entwicklungskoeffizienten der inversen Planck-Temperatur sind,

$$\frac{1}{T^*} = \frac{1}{\hbar c} \sum \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r k^{r-1} n_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}. \quad (\text{G.3})$$

Mit der Planck-Temperatur können wir für (G.1) auch schreiben

$$\int \left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right) \hbar ck \mathcal{S} d\mathbf{k} \geq 0. \quad (\text{G.4})$$

Hier ist $\hbar ck \mathcal{S} d\mathbf{k}$ die von der Materie absorbierte bzw. emittierte Strahlungsenergie von Strahlung mit Wellenzahlen um k und Richtungsvektoren um n_i . $\left(\frac{1}{T^*} - \frac{1}{T} \right)$ kann interpretiert werden, als die Temperaturdifferenz zwischen Strahlung mit (k, n_i) und der Materie. Betrachten wir den Wechselwirkungsterm eines Absorptions-/Emissionsprozesses,

$$\mathcal{S} = -\kappa (f - f_{|E}) = -\kappa \left(\frac{y}{\exp \frac{\hbar ck}{k_B T^*} - 1} - \frac{y}{\exp \frac{\hbar ck}{k_B T} - 1} \right), \quad (\text{G.5})$$

so sehen wir, daß für $T^* = T$ keine Energie zwischen Materie und Strahlung mit (k, n_i) ausgetauscht wird, gleichzeitig verschwindet die Entropieproduktion. Das ist genau, was man im thermischen Gleichgewicht erwartet: Temperaturgleichheit, kein Energieaustausch und verschwindende Entropieproduktion. Damit ist die Bezeichnung Temperatur für $T^*(k, n_i)$ gerechtfertigt: Die Strahlung mit (k, n_i) steht im thermischen Gleichgewicht mit Materie der Temperatur T , wenn gilt $T^* = T$.

Hier handelt es sich jedoch nicht um eine Temperaturdefinition für die gesamte Strahlung, sondern nur für Strahlung mit Wellenzahlen um k und Richtungsvektoren um n_i . Für den Sonnenstrahl etwa ist $T^* = T_\odot$, wenn n_i von der Sonnenoberfläche auf den Beobachter zeigt, andernfalls ist $T^* = 0$.

Das geeignete Thermometer bestünde aus Materie, die nur in einem sehr engen Wellenlängenbereich absorbieren und emittieren kann, und zwar nur Strahlung aus einem engen Raumwinkelbereich. Für alle anderen Frequenzen und Richtungen müsste diese Materie transparent sein. Diese hypothetische Materie könnte in ein Gleichgewicht mit der Nichtgleichgewichtsstrahlung treten. Dann hätte sie die Temperatur $T^*(k, n_i)$.

G.2 Entropie und Entropiefluß

Wir erinnern die Definition der Entropiedichte (1.18) und bilden ihr Differential. Mit der Definition der Planck-Temperatur (G.2) erhalten wir eine "Gibbs-Gleichung",

$$dh = \int \frac{1}{T^*} d(\hbar c k f) d\mathbf{k}. \quad (\text{G.6})$$

$(\hbar c k f) d\mathbf{k}$ ist die Energiedichte von Strahlung mit (k, n_i) , $\frac{1}{T^*}$ kann als der integrierende Faktor am Differential dieser Energiedichte bezeichnet werden. Damit hat T^* eine weitere aus der Thermodynamik bekannte Eigenschaft der Temperatur.

Mit (G.3) erhalten wir die Gibbs-Gleichung der Erweiterten Thermodynamik (D.17),

$$dh = \sum \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r du_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r. \quad (\text{G.7})$$

Wir betrachten nun den Entropiefluß (A.8), setzen $d\mathbf{k} = k^2 dk d\Omega = 1/3 \frac{dk^3}{dk} dk d\Omega$ und führen eine partielle Integration durch. Das gibt uns zunächst

$$\phi_k = -\frac{1}{3} \int \frac{\hbar c^2 k n_k}{T^*} k^3 \frac{\partial f}{\partial k} dk d\Omega. \quad (\text{G.8})$$

Nach einer weiteren partiellen Integration können wir schreiben

$$\phi_k = \int \frac{\hbar c^2 k n_k f}{T^*} \left(1 + \frac{1}{3} T^* \frac{\partial k}{\partial T^*} \right) d\mathbf{k}. \quad (\text{G.9})$$

$\hbar c^2 k n_k f d\mathbf{k}$ ist der Energiefluß von Strahlung mit (k, n_i) , entsprechend ist $\frac{\hbar c^2 k_k f}{T^*} d\mathbf{k}$ der reduzierte Energiefluß dieser Strahlung. An (G.9) ist zu sehen, daß der Entropiefluß von Strahlung mit (k, n_i) gegeben ist durch das $\left(1 + \frac{1}{3} T^* \frac{\partial \ln f}{\partial k}\right)$ -fache des reduzierten Energieflusses. Hier finden wir auf einer anderen Ebene abermals bestätigt, daß der Entropiefluß ungleich dem Quotienten aus Energiefluß und Temperatur ist.

G.3 Mittlere Planck-Temperatur

Nach den vorhergehenden Betrachtungen ist es klar, daß es kein Thermometer gibt, das eine Gesamttemperatur der Nichtgleichgewichtsstrahlung ohne Entropieproduktion messen kann. Immerhin ist es möglich, einen Mittelwert von T^* zu bilden, und diesen als mittlere Strahlungstemperatur zu bezeichnen. Hier bietet sich z.B. ein Energiemittel an,

$$\frac{1}{\bar{T}^*} = \frac{\int \frac{\hbar c k}{T^*} f d\mathbf{k}}{\int \hbar c k f d\mathbf{k}}. \quad (\text{G.10})$$

Die Erweiterte Thermodynamik liefert mit (G.3) für diesen Ausdruck

$$\frac{1}{\bar{T}^*} = \frac{\sum_{r,n} \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r u_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r}{e}. \quad (\text{G.11})$$

Eine weitere Möglichkeit ist eine Definition der mittleren Strahlungstemperatur gemäß

$$\frac{1}{\bar{T}^*} = \frac{\int \frac{\hbar c k}{T^*} \mathcal{S} d\mathbf{k}}{\int \hbar c k \mathcal{S} d\mathbf{k}} = \frac{\sum_{r,n} \Lambda_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r P_{\langle i_1 \dots i_n \rangle}^r}{P_e}. \quad (\text{G.12})$$

Mit dieser Definition erhält die Entropieproduktion (G.1) die Form

$$\sigma + \frac{r}{T} = k_B \int \left[\ln \left(\frac{y}{f} + 1 \right) - \frac{\hbar c k}{k_B T} \right] \mathcal{S} d\mathbf{k} \geq 0 = r \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\bar{T}^*} \right) \geq 0 \quad (\text{G.13})$$

Die mittlere Temperatur hat, da nicht meßbar, keine wirkliche physikalische Bedeutung. Sie läßt sich nur rechnerisch bestimmen, wenn die Verteilungsfunktion bekannt ist. Wir schließen, indem wir unserer Überzeugung Ausdruck geben, daß die Definition einer Temperatur im Nichtgleichgewicht nicht möglich ist.

Mit der Einführung der Planck-Temperatur beschreiben wir die Strahlung als Mischung mit unendlich vielen Komponenten verschiedener Temperatur. Nur auf diese Weise scheint es möglich, den Temperaturbegriff aus der Gleichgewichtsthermodynamik in die Nichtgleichgewichtsthermodynamik zu übernehmen.

Anhang H

Grundlegende Begriffe der Relativitätstheorie

Naturgemäß können wir keine umfassende Begründung der Relativitätstheorie liefern, sondern werden nur die für uns interessanten Ergebnisse mitteilen. Diese sind im wesentlichen den Büchern von FLIESSBACH [18], MÜLLER [38] und DE GROOT et.al. [23] entnommen.

H.1 Spezielle Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie behandelt die Transformation zwischen Inertialsystemen. Inertialsysteme (IS) sind Systeme, die sich gegenüber dem Fixsternhimmel unbeschleunigt bewegen. In IS haben die physikalischen Gesetze die einfachste Form.

H.1.1 Koordinaten und Lorentz-Metrik

Zeit- und Raumkoordinaten werden zu den Komponenten eines Vektors in der 4-dimensionalen Raumzeit zusammengefaßt,

$$x^A = \{x^0, x_i\}^A = \{ct, x_i\}^A; \quad (\text{H.1})$$

großbuchstabige Indizes durchlaufen im folgenden stets die Werte $A = 0, 1, 2, 3$, der Wert 0 bezeichnet die Zeitkoordinate, die Werte $i = 1, 2, 3$ entsprechend die Ortskoordinaten¹.

¹Auch hier gilt die Einsteinsche Summationskonvention: Über zwei gleiche Indizes wird summiert. Dabei ist darauf zu achten, daß je ein Index hoch- und einer tiefgestellt sein muß.

Die Lorentz-Metrik wird definiert gemäß

$$\eta_{AB} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{array} \right\}_{AB}. \quad (\text{H.2})$$

Das Wegelement in der Raumzeit ist gegeben durch

$$ds^2 = \eta_{AB} dx^A dx^B = c^2 dt^2 - dx_i dx_i. \quad (\text{H.3})$$

H.1.2 Lorentz-Transformation

Lorentz-Transformationen sind dadurch gekennzeichnet, daß sich das Wegelement durch die Transformation nicht ändert. Das bedeutet insbesondere, daß sich eine Lichtwelle in jedem Inertialsystem mit der Lichtgeschwindigkeit c fortpflanzt. Zum Beweis betrachtet man die Transformation zwischen den Inertialsystemen IS und IS' mit $x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$ und eine Lichtwelle, die sich in IS mit der Geschwindigkeit $dx_1/dt = c$ bewegt. Dann gilt $ds^2 = dt^2 (c^2 - (dx_1/dt)^2) = 0$. Da aber gelten muß $ds^2 = ds'^2$ folgt auch $dx'_1/dt' = c$. Die Beobachtung der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit in Inertialsystemen (MICHELSON&MORLEY) bildete die Grundlage für die Entwicklung der Speziellen Relativitätstheorie.

Es stellt sich heraus, daß die Lorentz-Transformation eine lineare Transformation sein muß,

$$x'^A = \Lambda_B^A x^B, \quad (\text{H.4})$$

mit der Transformationsmatrix

$$\Lambda_B^A = \left[\begin{array}{cc} \gamma & -\gamma/c V_k \\ -\gamma/c V_i & \delta_{ik} + (\gamma - 1) \frac{V_i V_k}{V^2} \end{array} \right], \quad (\text{H.5})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (\text{H.6})$$

V_k ist die Geschwindigkeit des Systems IS' gemessen aus IS. Die inverse Transformation wird geschrieben als $x^A = \bar{\Lambda}_B^A x'^B$; offensichtlich gilt $\bar{\Lambda}_B^A = \Lambda_B^A(-V_k)$.

H.1.3 4-Tensoren

Unter einem 4-Vektor versteht man einen Vektor, der sich gemäß

$$V'^A = \Lambda_B^A V^B \quad (\text{H.7})$$

transformiert. Die Komponenten mit hochgestellten Indizes werden als kontravariante Komponenten bezeichnet. Die kovarianten Komponenten erhält man aus der Vorschrift

$$V_A = \eta_{AB} V^B. \quad (\text{H.8})$$

Mit der Inversen der Lorentz-Metrik $\eta^{AB} = \eta_{AB}$ erhalten wir die kontravarianten Komponenten als

$$V^A = \eta^{AB} V_B. \quad (\text{H.9})$$

Ein kovarianter Vektor transformiert sich also gemäß²

$$V'_A = \eta_{AB} V'^B = \eta_{AB} \Lambda_C^B V^C = \eta_{AB} \Lambda_C^B \eta^{CD} V_D = \bar{\Lambda}_A^D V_D. \quad (\text{H.10})$$

$\bar{\Lambda}_A^D$ ist die Inverse der Transformationsmatrix Λ_B^A .

Verallgemeinernd bezeichnet man einen Tensor als 4-Tensor wenn sich seine kontravarianten Indizes mit Λ_B^A , und seine kovarianten Indizes mit $\bar{\Lambda}_A^D$ transformieren. Z.B. gilt für einen 4-Tensor dritter Stufe

$$T'^A{}_{BC} = \Lambda_D^A \bar{\Lambda}_E^B \bar{\Lambda}_F^C T^D{}_{EF}. \quad (\text{H.11})$$

Die Ableitung $\partial/\partial x^A$ transformiert sich wie ein kovarianter Vektor:

$$\frac{\partial}{\partial x'^A} = \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} \frac{\partial}{\partial x^B} = \bar{\Lambda}_A^B \frac{\partial}{\partial x^B}. \quad (\text{H.12})$$

H.1.4 Eigenzeit

(H.4) gilt auch für die Differentiale, $dx^A = \Lambda_B^A dx'^B$. Für eine in IS' ruhende Uhr gilt $dx'^A = \{cdt', 0, 0, 0\}^A$. Der Beobachter in IS mißt die Zeit $dt = \gamma dt'$. Die im Ruhesystem der Uhr gemessene Zeit wird als Eigenzeit τ bezeichnet. Es gilt mit $t' = \tau$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} = \sqrt{1 - V^2/c^2} dt. \quad (\text{H.13})$$

H.1.5 4-Geschwindigkeit und 4-Impuls

Die Spezielle Relativitätstheorie verlangt Gleichungen, die forminvariant gegenüber Lorentz-Transformation sind und im klassischen Grenzfall ($v \ll c$) die bekannten klassischen Gleichungen ergeben. Aufgrund dieser Forderungen lassen sich alle physikalischen Gesetze in lorentzinvarianter Form herleiten. Wir benötigen die Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung.

Die 4-Geschwindigkeit eines Massenpunktes wird definiert gemäß

$$U^A = \frac{dx^A}{d\tau}, \quad (\text{H.14})$$

²Die Metrik ist invariant gegen Lorentz-Transformation.

sie ist ein 4-Vektor, τ ist die Eigenzeit des Teilchens. Es gilt

$$U^A U_A = \eta_{AB} \frac{dx^A}{d\tau} \frac{dx^B}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{ds'}{d\tau} \right)^2 = c^2, \quad (\text{H.15})$$

hier bezeichnet $ds' = cd\tau$ das Wegelement im Ruhesystem des Teilchens.

Die Verallgemeinerung der Newtonschen Bewegungsgleichung lautet

$$\frac{dp^A}{d\tau} = F^A, \quad (\text{H.16})$$

$$p^A = m_0 U^A \quad (\text{H.17})$$

ist der 4-Impuls, m_0 ist die Ruhemasse des Teilchens und die Minkowski-Kraft F^A ist gegeben durch

$$F^A = \left\{ \gamma \frac{v_k K_k}{c}, K_i + (\gamma - 1) \frac{v_i v_k K_k}{v^2} \right\}^A, \quad (\text{H.18})$$

K_i ist die Newtonsche Kraft.

Für den 4-Impuls gilt

$$p^A = m_0 \left\{ \frac{dct}{d\tau}, \frac{dx_i}{d\tau} \right\}^A = \{m_0 \gamma c, m_0 \gamma v_i\}^A = \left\{ \frac{E}{c}, p_i \right\}^A. \quad (\text{H.19})$$

E bezeichnet die Energie, p_i den relativistischen Impuls und $m_0 \gamma = m$ ist die Masse des bewegten Massepunktes. Hier findet sich die berühmte Einsteinsche Formel für die Äquivalenz von Masse und Energie

$$E = mc^2. \quad (\text{H.20})$$

Diese begründet sich wie folgt: Die 0-Komponente von (H.15) lautet mit (H.18) und (H.13) $\frac{dE}{dt} = v_i K_i$. Da $v_i K_i$ die zugeführte Leistung ist, ist die Bezeichnung Energie für E gerechtfertigt.

Für den Betrag des 4-Impulses gilt

$$p^A p_A = E^2/c^2 - p_i p_i = m_0^2 U^A U_A = m_0^2 c^2. \quad (\text{H.21})$$

Für die Energie folgt

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 p_i p_i}, \quad (\text{H.22})$$

$m_0 c^2$ ist die Ruheenergie des Teilchens.

H.1.6 Photonen

Für Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, gilt $1/\gamma = 0$. Dies führt nach (H.19) zu unendlich großen Energien, wenn die Ruhemasse verschieden von Null ist. Für solche Teilchen

muß gelten $m_0 = 0$, insbesondere gilt dies für Photonen³. Dann ergibt sich jedoch für die Energie ein unbestimmter Ausdruck der Form $E = 0/0$.

Aus diesem Dilemma hilft die Quantenmechanik heraus, die für die Energie eines Photons den (uns schon bekannten) Ausdruck liefert,

$$E_{Ph} = \hbar ck. \quad (\text{H.23})$$

Aus (H.22) folgt mit $m_0 = 0$ für den Betrag des Impulses

$$\sqrt{p_i p_i} = E/c = \hbar k. \quad (\text{H.24})$$

Mit dem Richtungsvektor der Photonen n_i und dem Wellenvektor $k_i = kn_i$ folgt der Impuls eines Photons

$$p_i^{Ph} = \hbar kn_i = \hbar k_i. \quad (\text{H.25})$$

Der Photon-4-Impuls lautet also

$$p^A = \{\hbar k, \hbar k_i\}^A = \hbar k \{1, n_i\}^A, \quad (\text{H.26})$$

es gilt $p^A p_A = 0$. Man beachte, daß die Bewegungsgleichung in der Form (H.16) für Photonen keinen Sinn macht, da für diese gilt $d\tau = 0$.

H.1.7 Doppler-Effekt und Aberration

Da der 4-Impuls ein Lorentz-Vektor ist, transformiert er sich gemäß (H.7). Als Folge transformieren sich Wellenzahl k und Richtungsvektor n_i gemäß den Vorschriften

$$k' = k\gamma(1 - n_k V_k/c) \quad (\text{H.27})$$

$$n'_i = \frac{(n_i - \gamma/c V_i + (\gamma - 1) \frac{V_i V_k}{V^2} n_k)}{\gamma(1 - n_k V_k/c)} \quad (\text{H.28})$$

(H.27) beschreibt den relativistischen Dopplereffekt: Der Beobachter in IS' sieht eine andere Frequenz $\omega' = ck'$ als der Beobachter in IS. (H.28) beschreibt die Aberration: Der Beobachter in IS' ordnet dem Photon eine andere Richtung n'_i zu als der Beobachter in IS.

Ist die Transformationsgeschwindigkeit V_i sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit, so ergeben sich hieraus als Näherung die klassischen Formeln für Dopplereffekt und Aberration (Entwicklung bis zu Gliedern $\mathcal{O}(V/c)$)

$$k' \approx k(1 - n_k V_k/c) \quad (\text{H.29})$$

$$n'_i \approx n_i(1 + n_k V_k/c) - V_i/c \quad (\text{H.30})$$

³Massebehaftete Teilchen können nie die Lichtgeschwindigkeit erreichen, da dazu unendlich große Kräfte wirken müssten.

H.1.8 Transformation des Impulsraumelements

Wir fragen nach den Transformationseigenschaften des Impulsraumelements $d^3p = \hbar^3 d\mathbf{k}$. Nach (H.27, H.29) transformiert sich der Wellenvektor gemäß

$$k'_i = k_i - k\gamma/c V_i + (\gamma - 1) \frac{V_i V_k}{V^2} k_k. \quad (\text{H.31})$$

Die Transformationvorschrift lautet

$$d\mathbf{k}' = \left| \frac{\partial k'_i}{\partial k_j} \right| d\mathbf{k} \quad (\text{H.32})$$

mit der Jacobi-Determinante $|\partial k'_i / \partial k_j|$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial k'_i}{\partial k_j} \right| &= \left| \delta_{ij} - \gamma/c V_i n_j + (\gamma - 1) \frac{V_i V_j}{V^2} \right| \\ &= \gamma (1 - 1/c n_k V_k) = \frac{k'}{k} \end{aligned} \quad (\text{H.33})$$

Es folgt, daß $d\mathbf{k}/k$ ein Lorentzskalar ist. Das lorentzinvariante Impulsraumelement wird definiert durch

$$dP = \frac{d^3p}{p^0}. \quad (\text{H.34})$$

H.2 Allgemeine Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie beschäftigt sich mit den Vorgängen in Inertialsystemen. In Nichtinertialsystemen (also beschleunigten Systemen) treten in den physikalischen Gesetzen zusätzliche Terme auf, die die Inertialkräfte beschreiben. Nach EINSTEIN handelt es sich bei Inertialkräften um Gravitationskräfte⁴, die von den Massen im Universum herrühren (Machsches Prinzip). Damit sind Gravitationskräfte äquivalent zu Beschleunigungskräften (Äquivalenzprinzip). Es folgt, daß die Gravitationskräfte durch den Übergang in ein beschleunigtes System eliminiert werden können. Das beste Beispiel hierzu ist ein Beobachter in einem frei fallenden Fahrstuhl: dieser stellt für die Bewegung eines Massenpunktes keine Schwerkraft fest. EINSTEIN verallgemeinert: In einem frei fallenden System laufen *alle* Vorgänge so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden wäre. Dabei muß das betrachtete System so klein sein, daß die Inhomogenitäten des Feldes vernachlässigt werden können. Ein frei fallendes System im Erdfeld ist dann etwa ein Satellitensystem⁵. Diese Systeme werden auch als lokale Inertialsysteme (LIS) bezeichnet, in ihnen gelten die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie.

⁴Da schwere und träge Masse gleich sind (Eötvös) sind Inertialkräfte und Gravitationskräfte proportional zur Masse eines Körpers.

⁵Strenggenommen nur der Schwerpunkt des Satelliten.

Zu den relativistischen Gesetzen mit Gravitation, den Gesetzen der Allgemeinen Relativitätstheorie, führt eine Transformation vom LIS zu einem relativ dazu beschleunigten System⁶. Die Spuren, die diese Transformation in den Gesetzen hinterläßt, beschreiben den Einfluß der Gravitation.

Im folgenden beziehen sich alle Größen in Großbuchstaben auf das LIS.

H.2.1 Metriktensor

Wir betrachten zwei Ereignisse im LIS mit den Koordinaten $X^A, X^A + dX^A$. Ihr Abstand ist gegeben durch

$$ds^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B. \quad (\text{H.35})$$

In irgendeinem beschleunigten System seien die Koordinaten der Ereignisse $x^A, x^A + dx^A$. Dann folgt

$$ds^2 = \eta_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^C} \frac{\partial X^B}{\partial x^D} dx^C dx^D = g_{CD} dx^C dx^D, \quad (\text{H.36})$$

$g_{CD} = \eta_{AB} \frac{\partial X^A}{\partial x^C} \frac{\partial X^B}{\partial x^D}$ ist der Metriktensor der Transformation, wir nehmen g_{CD} zunächst als bekannt an. Durch g_{CD} ist sowohl die Krümmung des Raumes als auch die Wahl der Koordinaten auf dem Raum bestimmt.

H.2.2 Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (H.16) für ein wechselwirkungsfreies Teilchen im LIS kann geschrieben werden als

$$\frac{d^2 X^A}{d\lambda^2} = 0. \quad (\text{H.37})$$

Dabei ist $\lambda = \tau/m_0$ für massebehaftete Teilchen, für Photonen ist λ ein geeigneter Bahnparameter, der so gewählt wird, daß gilt

$$p^A = \frac{dX^A}{d\lambda} \quad (\text{H.38})$$

Die Lösung beschreibt eine geradlinige Bewegung im LIS. Aus (H.37) folgt zunächst

$$\frac{d^2 X^A}{d\lambda^2} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial X^A}{\partial x^B} \frac{dx^B}{d\lambda} \right) = \frac{\partial X^A}{\partial x^B} \frac{d^2 x^B}{d\lambda^2} + \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^B \partial x^C} \frac{dx^B}{d\lambda} \frac{dx^C}{d\lambda} = 0 \quad (\text{H.39})$$

und daraus dann die Bewegungsgleichung im System x^A

$$\frac{d^2 x^D}{d\lambda^2} = -\Gamma_{BC}^D \frac{dx^B}{d\lambda} \frac{dx^C}{d\lambda}, \quad \frac{dp^D}{d\lambda} = -\Gamma_{BC}^D p^B p^C. \quad (\text{H.40})$$

⁶Dieses kann z.B. relativ zur Erde ruhen.

Hier wurden als Abkürzung die Christoffel-Symbole Γ_{BC}^D eingeführt,

$$\Gamma_{BC}^D = \frac{\partial x^D}{\partial X^A} \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^B \partial x^C}, \quad (\text{H.41})$$

sie sind durch die Metrik eindeutig bestimmt

$$\Gamma_{BC}^D = \frac{1}{2} g^{DA} \left(\frac{\partial g_{AC}}{\partial x^B} + \frac{\partial g_{AB}}{\partial x^C} - \frac{\partial g_{BC}}{\partial x^A} \right). \quad (\text{H.42})$$

Die Lösungen von (H.40) beschreiben die Bewegung entlang geodätischer Linien, d.h. entlang der kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten des gekrümmten Raumes.

H.2.3 Riemann-Tensoren

Der Riemannsche Raum ist festgelegt durch die Abstände seiner Punkte,

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B. \quad (\text{H.43})$$

Die Metrik ist symmetrisch und differenzierbar. Der Raum kann durch verschiedene Koordinaten x^A, x'^A beschrieben werden. Diese hängen über die Transformationsmatrizen $\alpha_B^A, \bar{\alpha}_B^A$ zusammen gemäß

$$\begin{aligned} dx'^A &= \frac{\partial x'^A}{\partial x^B} dx^B = \alpha_B^A dx^B \\ dx^A &= \frac{\partial x^A}{\partial x'^B} dx'^B = \bar{\alpha}_B^A dx'^B \\ \alpha_B^A \bar{\alpha}_C^B &= \delta_C^A \end{aligned} \quad (\text{H.44})$$

Es folgt

$$ds^2 = g_{AB} dx^A dx^B = g_{AB} \bar{\alpha}_C^A \bar{\alpha}_D^B dx'^C dx'^D = g'_{CD} dx'^C dx'^D \quad (\text{H.45})$$

mit $g'_{CD} = g_{AB} \bar{\alpha}_C^A \bar{\alpha}_D^B$. Durch die Transformation ändert sich die Metrik, jedoch bleiben die Abstände ds erhalten. Eine Größe, die sich wie dx^A transformiert heißt kontravarianter Vektor,

$$V'^A = \alpha_B^A V^B, V^A = \bar{\alpha}_B^A V'^B. \quad (\text{H.46})$$

Den kovarianten Vektor erhält man durch das Herunterziehen des Index,

$$\begin{aligned} V_A &= g_{AB} V^B \\ V'_B &= \bar{\alpha}_B^A V_A, V_B = \alpha_B^A V'_A. \end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung auf Tensoren beliebiger Stufe ist klar (vergl. (H.11)).

Die partielle Ableitung $\partial/\partial x^A$ transformiert sich nicht wie ein Vektor. Dies ist aber der Fall für die kovariante Ableitung, definiert für Skalare, Vektoren und Tensoren durch

$$\begin{aligned} S_{;D} &= \frac{\partial S}{\partial x^D} \\ V^A_{;D} &= \frac{\partial V^A}{\partial x^D} + \Gamma^A_{DE} V^E, \quad V_{A;D} = \frac{\partial V_A}{\partial x^D} + \Gamma^E_{DA} V_E \\ T^{AB}_{;D} &= \frac{\partial T^{AB}}{\partial x^D} + \Gamma^A_{DE} T^{EB} + \Gamma^B_{DE} T^{AE}, \quad usw. \end{aligned} \quad (\text{H.47})$$

die Verallgemeinerung für höhere Tensoren mit gemischt ko- und kontravarianten Komponenten ist evident. Mit der Lorentzmetrik η_{AB} reduziert sich die kovariante Ableitung auf die partielle Ableitung.

Gleichungen, die aus Riemann-Tensoren aufgebaut sind, sind forminvariant, d.h. sie haben in jedem Koordinatensystem dieselbe Form.

H.2.4 Kovarianzprinzip

Es werden folgende Forderungen an die physikalischen Gesetze gestellt:

a.) in der Speziellen Relativitätstheorie: Physikalische Gesetze müssen unter Lorentztransformation invariant sein. In einem speziellen Inertialsystem müssen sie bekannt sein (z.B. Newtonscher Grenzfall im Ruhesystem).

b.) in der Allgemeinen Relativitätstheorie: Physikalische Gesetze müssen unter beliebigen Transformationen invariant sein (\Rightarrow kovariante Gleichungen). Im lokalen Ruhesystem ($g_{AB} = \eta_{AB}$) ergeben sich die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie.

Mit diesen als Kovarianzprinzip bekannten Forderungen gelangt man schrittweise von den bewährten Gesetzen der klassischen Physik über die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie zu den Gesetzen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

H.2.5 Krümmungstensor und Einsteinsche Feldgleichung

Was noch aussteht, ist die Bestimmung der Metrik, bzw. der Krümmung des Raumes. Da es hierfür in der klassischen Physik keine Entsprechung gibt, ist das Kovarianzprinzip nicht anwendbar.

Die Krümmung des Raumes folgt aus der Metrik (H.43), allerdings ist den g_{AB} nicht ohne

weiteres anzusehen, ob der Raum gekrümmt ist, da sie noch von den verwendeten Koordinaten abhängen⁷. Ein geeignetes Maß für die Krümmung des Raumes ist der Krümmungstensor

$$R^A{}_{BCD} = \frac{\partial \Gamma^A_{BC}}{\partial x^D} - \frac{\partial \Gamma^A_{BD}}{\partial x^C} + \Gamma^E_{CB} \Gamma^A_{ED} - \Gamma^E_{DB} \Gamma^A_{EC}. \quad (\text{H.48})$$

Eine der Spuren des Krümmungstensors heißt Ricci-Tensor,

$$R_{BD} = R^A{}_{BAD}, \quad (\text{H.49})$$

dessen Spur heißt Krümmungsskalar,

$$R = R^A{}_A = R_{AB} g^{AB}. \quad (\text{H.50})$$

Bezüglich der Eigenschaften dieser Tensoren (Symmetrien, Zahl der unabhängigen Komponenten) siehe [18].

Im Falle, daß $R^A{}_{BCD} = 0$ ist, ist der Raum eben.

Die g_{AB} werden aus der Einsteinschen Feldgleichung bestimmt (zur Begründung siehe wie stets [18]),

$$R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{AB}. \quad (\text{H.51})$$

Hier ist G die Gravitationskonstante und T^{AB} der Energie-Impulstensor (siehe den Haupttext der Arbeit). Da die Erhaltung von Energie und Impuls verlangt $T^{AB}{}_{;B} = 0$, sind die zehn Gleichungen (H.51) noch vier Einschränkungen unterworfen,

$$\left(R_{AB} - \frac{R}{2} g_{AB} \right)_{;B} = 0. \quad (\text{H.52})$$

(H.51, H.52) bilden also sechs unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der zehn Komponenten von g_{AB} . Vier Bedingungen an g_{AB} sind also beliebig vorgebar. Dies ist nützlich: Die vier Koordinaten x^A sind frei wählbar.

H.2.6 Transformation des Impulsraumelements

Wir fragen nach den Transformationseigenschaften des Impulsraumelements d^3p zwischen den Systemen x^A und x'^A . Es gilt

$$d^3p = \left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| d^3p' \quad (\text{H.53})$$

Für die Jacobi-Determinante folgt zunächst

$$\left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^A} \frac{\partial p'^A}{\partial p'^j} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} + \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} \frac{\partial p'^0}{\partial p'^j} \right|. \quad (\text{H.54})$$

⁷Z.B. kann ja auch eine ebene Fläche durch krummlinige (etwa Polar-) Koordinaten beschrieben werden.

Die Ableitung $\partial p^0/\partial p^j$ wird berechnet wie folgt: Es gilt

$$g_{AB}p^A p^B = g_{00}p^0 p^0 + 2g_{0k}p^0 p^k + g_{jk}p^j p^k = m_0^2 c^2 \quad (\text{H.55})$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach p^r liefert

$$\begin{aligned} 0 &= (g_{00}p^0 + g_{0k}p^k) \frac{\partial p^0}{\partial p^r} + g_{0r}p^0 + g_{rk}p^k \\ &= g_{0A}p^A \frac{\partial p^0}{\partial p^r} + g_{Ar}p^A = p_0 \frac{\partial p^0}{\partial p^r} + p_r \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial p^0}{\partial p^r} = -\frac{p_r}{p_0}. \quad (\text{H.56})$$

Damit lautet die Jacobi-Determinante

$$\left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| = \left| \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} - \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} \frac{p'_j}{p'_0} \right|. \quad (\text{H.57})$$

Dies kann als die Determinante einer 4-Matrix geschrieben werden,

$$\left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0^j \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} - \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} \frac{p'_j}{p'_0} \end{vmatrix} \quad (\text{H.58})$$

wo $0^j = \{0, 0, 0\}^j$. Mit den Rechenregeln für Determinanten ergeben sich folgende Umformungen

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{p'_j}{p'_0} \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \end{vmatrix} = \frac{1}{p'_0} \begin{vmatrix} p'_0 & p'_j \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{p'_0} \begin{vmatrix} p'_A & \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^A} & \end{vmatrix} = \frac{1}{p'_0} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} p_B & \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^A} & \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{p'_0} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} p_B - \frac{\partial x^k}{\partial x'^A} p_k & \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^A} & \end{vmatrix} = \frac{p_0}{p'_0} \left| \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} \right| \end{aligned}$$

Nun muß die Determinante $\left| \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} \right|$ bestimmt werden. Es gilt für die Transformation zwischen dem LIS und x^A (H.36) $g_{AB} = \frac{\partial X^C}{\partial x^A} \frac{\partial X^D}{\partial x^B} \eta_{CD}$ und also für die Determinanten

$$g = |g_{AB}| = \left| \frac{\partial X^C}{\partial x^A} \right| \left| \frac{\partial X^D}{\partial x^B} \right| |\eta_{CD}| \quad (\text{H.59})$$

wegen $|\eta_{CD}| = -1$ folgt

$$\left| \frac{\partial X^C}{\partial x^A} \right| = \sqrt{-g} \quad (\text{H.60})$$

Damit gilt für die Transformation

$$d^4 X = \sqrt{-g} d^4 x = \sqrt{-g'} d^4 x' \quad (\text{H.61})$$

Für die Transformation zwischen x^A und x'^A folgt also

$$d^4 x = \left| \frac{\partial x^B}{\partial x'^A} \right| d^4 x' = \frac{\sqrt{-g'}}{\sqrt{-g}} d^4 x' \quad (\text{H.62})$$

Mit diesem Ergebnis ergibt sich endlich

$$\left| \frac{\partial p^k}{\partial p'^j} \right| = \frac{p_0 \sqrt{-g'}}{p'_0 \sqrt{-g}} \quad (\text{H.63})$$

Mit (H.53) haben wir jetzt die gesuchte Transformationseigenschaft gefunden,

$$d^3 p = \frac{p_0 \sqrt{-g'}}{p'_0 \sqrt{-g}} d^3 p'. \quad (\text{H.64})$$

Es folgt, daß die Größe

$$dP = \frac{\sqrt{-g}}{p_0} d^3 p \quad (\text{H.65})$$

invariant ist. dP ist das invariante Impulsraumelement. Werden nur Lorentztransformationen betrachtet, so findet man hier (H.34) wieder.

H.2.7 Eine Identität

Wir beweisen die Gültigkeit der Identität

$$p^A{}_{;B} = \Gamma_{BC}^A p^C \frac{\partial p^A}{\partial p^a}. \quad (\text{H.66})$$

Zum Beweis betrachten wir die Komponenten einzeln. Wir wählen $A = i$ und erhalten mit der Definition der kovarianten Ableitung

$$\frac{\partial p^i}{\partial x^B} + \Gamma_{BC}^i p^C \stackrel{!}{=} \Gamma_{BC}^a p^C \frac{\partial p^i}{\partial p^a} = \Gamma_{BC}^a p^C \delta_a^i = \Gamma_{BC}^i p^C \quad (\text{H.67})$$

Da p^i, x^A die unabhängigen Variablen der kinetischen Theorie sind, gilt $\partial p^i / \partial x^B = 0$ und die letzte Gleichung ist identisch erfüllt.

Für $A = 0$ erhalten wir zunächst

$$p^0{}_{;B} \stackrel{!}{=} \Gamma_{BC}^a p^C \frac{\partial p^0}{\partial p^a}, \quad (\text{H.68})$$

und mit (H.56)

$$p^0{}_{;B} = -\Gamma_{BC}^a p^C \frac{p_a}{p_0}. \quad (\text{H.69})$$

Andererseits gilt wegen $p^B p_B = m^2 c^2$

$$0 = (p^A p_A)_{;B} = 2p_{AP}{}^A{}_{;B} \quad (\text{H.70})$$

Es folgt

$$p_0 p^0{}_{;B} = -p_a p^a{}_{;B} = -p_a \left(\frac{\partial p^a}{\partial x^B} + \Gamma_{BC}^a p^C \right) = -p_a \Gamma_{BC}^a p^C. \quad (\text{H.71})$$

Damit ist auch die Gültigkeit von (H.68) gezeigt und also ist die Identität (H.66) bewiesen.

Literaturverzeichnis

- [1] G. ALI, V. ROMANO *Radiation Hydrodynamics: Shock Structure for a Radiating Gas described with a Variable Eddington Factor*. Preprint (1994)
- [2] J.L. ANDERSON, E.A. SPIEGEL *The Moment Method in Relativistic Radiative Transfer*. Ap.J. **171** (1972)
- [3] A.M. ANILE, S. PENNISI, M. SAMMARTINO *A Thermodynamical Approach to eddington Factors*. J.Math.Phys. **32** (1991)
- [4] H.A. BETHE, E.E. SALPETER *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Systems*. Handbuch der Physik XXXV: *Atome I* (Hrgb. S. Flügge) Springer, Berlin (1957)
- [5] M. BORN, E.WOLF *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford (1980)
- [6] U. CALLIES, F. HERBERT *Radiative Processes and Non-equilibrium Thermodynamics*. ZAMP **39** (1988)
- [7] S. CHANDRASEKHAR *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Pub., London (1957)
- [8] S. CHANDRASEKHAR *Radiative Transfer*. Dover Pub., London (1960)
- [9] N.A. CHERNIKOV *The Relativistic Gas in the Gravitational Field*. Act.Phys.Pol. **13** (1963)
- [10] N.A. CHERNIKOV *Equilibrium Distribution of the Relativistic Gas*. Act.Phys.Pol. **26** (1964)
- [11] N.A. CHERNIKOV *Microscopic Foundation of Relativistic Hydrodynamics*. Act.Phys.Pol. **27** (1964)
- [12] B.D. COLEMAN, W. NOLL *The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity*. Arch. Rational Mech. Anal., **13** (1963)
- [13] W. DREYER *Maximisation of the Entropy in Non-equilibrium*. J.Phys.A: Math.Gen. **20** (1987)

-
- [14] W. DREYER, H. STRUCHTRUP *Heat Pulse Experiments Revisited*. Cont. Mech. Thermodyn. **5** (1) (1993)
- [15] C. ESSEX *Radiation and the Violation of Bilinearity in the Thermodynamics of Irreversible Processes*. Planet. Space Sci. **32** (1984)
- [16] B.C. EU, K. MAO *Kinetic Theory Approach to Irreversible Thermodynamics of Radiation and Matter*. Physica A **180** (1992)
- [17] E. FICK *Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie*. Aula, Wiesbaden (1988)
- [18] T. FLIESSBACH *Allgemeine Relativitätstheorie*. B.I., Mannheim (1990)
- [19] A. FROHN *Einführung in die kinetische Gastheorie*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1979)
- [20] GERTHSEN, KNESER, VOGEL *Physik (15. Auflage, bearb. von H. Vogel)*. Springer, Berlin (1986)
- [21] H. GRAD *On the Kinetic Theory of Rarefied Gases*. Comm.Pure Appl.Math., Vol.2, Wiley, New Yorck (1949)
- [22] S.R. DE GROOT, P. MAZUR *Non-equilibrium Thermodynamics*. North-Holland, Amsterdam (1969)
- [23] S.R. DE GROOT, W.A. VAN LEEUWEN, CH. G. VAN WEERT *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam (1980)
- [24] S. HARRIS *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*. Holt, Rinehart & Winston, New Yorck (1971)
- [25] S.-H. HSIEH, E.A. SPIEGEL *The Equations of Photohydrodynamics*. Ap.J. **207** (1976)
- [26] S. KABELAC *Thermodynamik der Strahlung*. Vieweg, Braunschweig (1994)
- [27] E. KLINGBEIL *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I., Mannheim (1985)
- [28] G.M. KREMER, I. MÜLLER *Radiation Thermodynamics*.
- [29] W. LARECKI *Symmetric Conservative Form of Low-temperature Phonon Gas Hydrodynamics II. Equations of Heat Transport and Thermal Waves in the Case of Linear Isotropic Approximation of Phonon Frequency Spectrum*. Il Nuovo Cimento **1868 D** (1991)
- [30] C.D. LEVERMORE *Relating Eddington Factors to Flux Limiters*. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer **31** (1983)
- [31] C.D. LEVERMORE, G.C. POMRANING *A Flux-limited Diffusion Theory*. Ap.J. **248** (1981)
- [32] R. L. LIBOFF *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*. Wiley, New Yorck (1969)

- [33] I.S. LIU *Method of Lagrange Multipliers for Exploitation of the Entropy Principle*. Arch.Rational Mech. Anal. **46** (1972)
- [34] C. MARLE *Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs. I. – L'équation de Boltzmann relativiste*. Ann. Inst. Henri Poincaré **X** (1) (1969)
- [35] D. MIHALAS, B. W. MIHALAS *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, New York (1984)
- [36] I. MÜLLER *Grundzüge der Thermodynamik*. Springer, Berlin (1994)
- [37] I. MÜLLER, T.RUGGERI *Extended Thermodynamics*. Springer, New York (1993) (Springer Tracts in Natural Philosophy Vol. 37)
- [38] I. MÜLLER *Thermodynamics*. Pitman, New York (1985)
- [39] A. ORE *Entropy of Radiation*. Phys. Rev **98** (1955)
- [40] J. OXENIUS *Kinetic Theory of Particles and Photons*. Springer, Berlin (1986)
- [41] M. PLANCK *Theorie der Wärmestrahlung*. Barth, Leipzig (1966)
- [42] G.C. POMRANING *The Equations of Radiation Hydrodynamics*. Pergamon, Oxford (1973) (International Series of Monographs in Natuaral Philosophy Vol. 54)
- [43] S. REINECKE, G.M. KREMER *Method of Moments of Grad*. Phys. Rev. A **42** (1990)
- [44] P. ROSEN *Entropy of Radiation*. Phys. Rev **96** (1954)
- [45] M.A. SCHWEIZER *Relativistic Radiative Hydrodynamics*. Ann. Phys. **183** (1988)
- [46] A. SOMMERFELD *Vorlesungen über theoretische Physik Bd. V: Thermodynamik und Statistik*. Harri Deutsch, Thun (1977)
- [47] A. SOMMERFELD *Atombau und Spektrallinien, II. Band*. Vieweg, Braunschweig (1953)
- [48] H. STRUCHTRUP *On the Number of Field Equations in Extended Thermodynamics of Phonons*. Proceedings of the VII International Conference on Waves and Stability in Continous Media. World Scientific, Singapore (1994)
- [49] K.S. THORNE *Relativistic Radiative Transfer: Moment Formalisms*. Mon. Not. R. astr. Soc. (1981)
- [50] L. WALDMANN *Transporterscheinungen in Gasen von mittlerem Druck*. Handbuch der Physik XII: *Thermodynamik der Gase*. (Hrgb. S. Flügge) Springer, Berlin (1958)
- [51] W. WEISS *Zur Hierarchie der Erweiterten Thermodynamik*. Dissertation. TU Berlin (1990)